

数 学

11 年 度(前期)

注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文1ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

（例） 受験番号 50001 番の場合 →

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書いても無効である。
5. 書き損じても，かわりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 p, q は素数で, $p < q$ とする。

(1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ をみたす整数 r が存在するのは, $p = 2, q = 3$ のときに限ることを示せ。

2 α, β を 0 でない複素数とし,

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}, \beta' = \frac{\beta}{|\beta|^2}$$

とする。

(1) $|\alpha' - \beta'|$ を $|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|$ を用いて表せ。

(2) α, β が $|\alpha - \beta| = 1, |\alpha| = 2$ をみたしながら動くとき, $|\alpha' - \beta'|$ の最大値と最小値を求めよ。

3 三角形 ABC において, $|\overrightarrow{AB}| = 4, |\overrightarrow{AC}| = 5, |\overrightarrow{BC}| = 6$ である。辺 AC 上の点 D は $BD \perp AC$ をみたし, 辺 AB 上の点 E は $CE \perp AB$ をみたす。CE と BD の交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{AD} = r \overrightarrow{AC}$ となる実数 r を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AH} = s \overrightarrow{AB} + t \overrightarrow{AC}$ となる実数 s, t を求めよ。

4 (1) 曲線 $y = x^3$ と直線 $y = 3x + a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点 $(a, 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $DA \cdot DB \cdot DC$ の最大値を求めよ。

5 箱 A, 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個, 白玉が 3 個, 合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後, 箱 A に赤玉が 1 個, 白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。