

①

- (1) $m=3k, 3k+1, 3k+2$ のとき、それぞれ m^3+1 は
 $(3k)^3+1=27k^3+1$
 $(3k+1)^3+1=3(9k^3+9k^2+3k)+2$
 $(3k+2)^3+1=3(9k^3+18k^2+12k+3)$
 となるので、これが3の倍数となる m は
 3で割ると2余る整数 [答]

- (2) m, m^m, m^m が自然数とする。
 $m=3k$ のときは、 m^m は3の倍数である。
 $m=3k+1$ のときは、 m^m は3で割ると1余る数である。
 これを数学的帰納法で証明する。
 $m=1$ のときは明らかである。
 $m^m=3K+1$ (K は整数) であるとする
 $m^{m+1}=(3K+1)(3k+1)=9Kk+3K+3k+1$
 だから、 m^{m+1} も3で割ると1余る数である。
 以上により、 $m=3k$ または $m=3k+1$ の形のときは
 m^m+1 は3の倍数にはならない。
 $m=3k+2$ のときは、 m^m を3で割った余りは
 m が奇数のときは2、偶数のときは1
 である。これを数学的帰納法で証明する。
 $m=1$ のときは明らかである。
 $m^m=3K+1$ (K は整数) であるとする
 $m^{m+1}=(3K+1)(3k+2)=9Kk+6K+3k+2$
 $m^m=3K+2$ (K は整数) であるとする
 $m^{m+1}=(3K+2)(3k+2)=9Kk+6K+6k+3+1$
 よって、 m^m の余りが1なら m^{m+1} の余りは2、
 m^m の余りが2なら、 m^{m+1} の余りは1である。
 以上により、 m^m+1 が3の倍数になるとき、つまり
 m^m を3で割った余りが2になるのは、
 m を3で割った余りが2で、 m が奇数のとき
 である。つまり
 6で割ると5余る整数 [答]

②

- (1) α, β を $|\alpha|=1, |\beta|=1$ とおいたから独立に
 動く点であるとする。
 $\alpha+\beta$ は
 $|\alpha+\beta| \leq 2$
 の範囲を動く。 α が原点中心半径1
 の円周上を動き、 $\alpha+\beta$ は α 中心半径1の円周上を
 動くから、第2の円を第1の円周に沿って回転させ
 たときに通過する範囲になるからである。
 $|\alpha-1|=1, |\beta-i|=1$ のとき
 $\alpha+\beta-(1+i)=(\alpha-1)+(\beta-i)$
 と表されるから、上の α, β は $\alpha'=\alpha-1, \beta'=\beta-i$ と
 おいて考えれば、 $\alpha+\beta$ は
 $|\alpha+\beta-(1+i)| \leq 2$
 の範囲を動く。
 よって右図のとおり。
 (2) 平行移動において、 $\beta-i$
 は $-1+i$ を中心とする半径1の円周を描く。
 $|\alpha-1|=1$ であり、 $\alpha-1$ の偏角は任意なので
 $(\alpha-1)$ をかけることは、原点の
 まわりに任意の角だけ回転
 することを意味する。よって
 $(\alpha-1)(\beta-i)$ は $\beta-i$ が
 描く円を原点のまわりに回転
 したときに通過する範囲になる。
 よって右図のとおり。

③

- (1) 同一平面上にあるためには
 $\vec{OC} = r\vec{OA} + R\vec{OB}$ (r, R は実数)
 が成り立つ。この成分を比較して

$$\begin{cases} 0 = 2r + 2R & \text{--- ①} \\ 1 = 0 + R & \text{--- ②} \\ c = ar + 5R & \text{--- ③} \end{cases}$$

 ②より $R=1$ 。∴ ①より $r=-1$ 。∴ ③より
 $c = -a + 5$ [答]
 (2) 上の結果より $\vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{AB}$
 したがって、四角形 $OACB$ は平行四辺形である。
 その面積を S とすると

$$S = \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OC}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OC})^2}$$

$$= \sqrt{(4+a^2)(1+c^2) - (ac)^2}$$

$$= \sqrt{4+a^2+4c^2}$$

 これに、(1)の結果を代入して

$$S = \sqrt{4+a^2+4(-a+5)^2}$$

$$= \sqrt{5a^2-40a+104}$$

$$= \sqrt{5(a-4)^2+24}$$

 これは $a=4$ のとき最小値 $S=2\sqrt{6}$ [答]

④

- (1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$
 $f(x)$ の増減表は次のとおり

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{23}{27}$	↘	-2	↗

 よって、グラフは右図のとおり。
 さらに、 $f(2)=1$ である。
 したがって、 $f(x)=0$ の解は1つだけであり、
 その解 α は $1 < \alpha < 2$ の範囲にある。
 (2) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。
 $f(x) \in g(x)$ と割りすると
 $f(x) = xg(x) - 1$
 と表されるから、これに β を代入すると、 $g(\beta)=0$ であり
 $f(\beta) = -1 < 0$
 であるから $\beta < \alpha$ [答]
 (3) $g(x)=0$ を解いて $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because \beta > 0$)
 $(\frac{11}{5})^2 = \frac{121}{25} < 5$ であり、 $\frac{11}{5} < \sqrt{5}$ であるから
 $\beta > \frac{1+\frac{11}{5}}{2} = \frac{16}{10}$ ∴ $\beta^3 > (\frac{16}{10})^3 = \frac{4096}{1000}$
 だから $\beta^3 > 4$ であり、 $\alpha < 2$ だから $\alpha^2 < 4$ 。
 ∴ $\alpha^2 < \beta^3$ [答]

⑤

- (1) $X=1$ となるのは $a_1 \geq a_2$ となる2つである。
 最初の2枚の選り方は ${}_2n P_2 = 2n(2n-1)$ 通り。
 そのうち、 $a_1 = a_2$ となる選り方は $2n$ 通り、
 $a_1 \neq a_2$ となる選り方は $2n(2n-2)$ 通りある。
 前者の全部と後者の半分が条件をみたすから
 確率は $\frac{2n + n(2n-2)}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$ [答]
 (2) $X=n$ となるのは $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ か $a_n \geq a_{n+1}$
 となることである。この前者により
 $a_1=1, a_2=2, \dots, a_n=n$ ①
 と成りしかなく、そのとき後者は自動的に成立する。
 前半 n 枚の選り方は ${}_n P_n = \frac{(2n)!}{n!}$ 通り、
 そのうち、①をみたす選り方は 2^n 通りある。
 確率は $\frac{n! \cdot 2^n}{(2n)!}$ [答]
 (3) $X \geq m$ となるのは $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ ②
 が成り立つことである。
 m 枚の選り方は ${}_m P_m = \frac{(2n)!}{(2n-m)!}$ 通り、
 ②をみたすには、異なる数の m 枚を選ぶ必要がある、
 その各々に対し並べ方は1通りである。よって
 $m C_m \cdot 2^m = \frac{n! \cdot 2^m}{m! (n-m)!}$ 通りある。
 確率は $\frac{(2n-m)! \cdot n! \cdot 2^m}{(2n)! \cdot m! (n-m)!}$ [答]