

1

- (1) 正の整数 n で $n^3 + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。
- (2) 正の整数 n で $n^n + 1$ が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

2

複素数 α, β は $|\alpha - 1| = 1, |\beta - i| = 1$ をみたす。

- (1) $\alpha + \beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。
- (2) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

3

a, c を実数とする。

空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, a)$, $B(2, 1, 5)$, $C(0, 1, c)$ は同一平面上にある。

(1) c を a で表せ。

(2) 四角形 $OABC$ の面積の最小値を求めよ。

4

$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$ とする。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ。また,
 $1 < \alpha < 2$ であることを示せ。
- (2) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする。 α と β の大小を比較せよ。
- (3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ。

5

1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, $\dots$, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$$

とする。 $a_k \geq a_{k+1}$ ($1 \leq k < 2n$) となる最小の k を X とする。

- (1) $X = 1$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = n$ となる確率を求めよ。
- (3) m は $1 \leq m < n$ をみたす整数とする。 $X \geq m$ となる確率を求めよ。