

1

(1) 右図に破線が描いた一辺の長さ 1 の正方形からスタートとして一辺の長さを徐々に長くして行けば、面積最大となるのは一辺の長さ 1 の最大正方形は図中太線のものとなる。

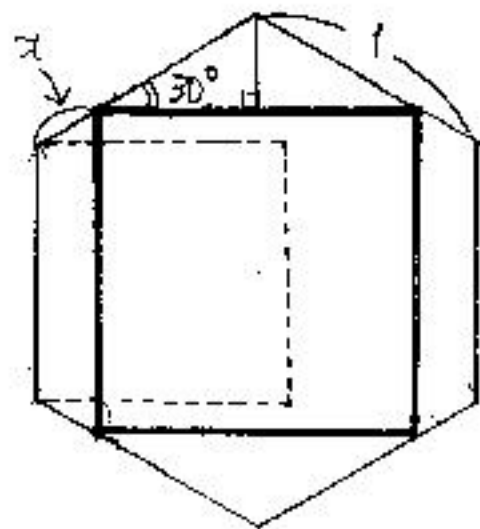
図中にある x を用いると、縦横の一辺の長さ $1-x$ 、それぞれ

$$\begin{cases} 1 + 2 \times x \sin 30^\circ = 1 + x \\ 2 \times (1-x) \cos 30^\circ = \sqrt{3}(1-x) \end{cases}$$

と表され、これらが等しいので、

$$1 + x = \sqrt{3} - \sqrt{3}x \iff x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

よって、求める最大値は $(1+x)^2 = (3-\sqrt{3})^2 = 12-6\sqrt{3}$ である。



(2) (1) で用いた 2 つの長さ $1+x$, $\sqrt{3}(1-x)$ を 2 辺の長さとする長方形の面積は $\sqrt{3}(1-x^2)$ であり、 $0 \leq x \leq 1$ のときこれより $x=0$ で最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

2

(1) 直線 AB の傾き $= \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$, 直線 AC の傾き $= \frac{c^2 - a^2}{c - a} = a + c$ と

それぞれ $\tan \alpha, \tan \beta$ ($-90^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$) とすれば,

$$\begin{aligned}\angle BAC = \beta - \alpha &\Rightarrow \tan \angle BAC = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{c - b}{1 + (a + b)(a + c)}\end{aligned}$$

となり、これより a, b, c の整数 $\Rightarrow a$ は有理数である。と $a = 3$ とし、 $\angle BAC = 60^\circ$ であるとする。と、 $\tan \angle BAC = \sqrt{3}$ は無理数であるから、矛盾が示される。

(2) $\angle BAC = 45^\circ$ とき $\tan \angle BAC = 1$ であるから、 $a = -3$ とき

$$c - b = 1 + (b - 3)(c - 3)$$

$$\Leftrightarrow bc - 2b - 4c + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b - 4)(c - 2) = -2$$

$$\Leftrightarrow (b - 4, c - 2) = (-2, 1), (-1, 2), (1, -2), (2, -1)$$

$$\Leftrightarrow (b, c) = (2, 3), (3, 4), (5, 0), (6, 1)$$

$b < c$ となるものは (b, c) は、 $(2, 3)$ と $(3, 4)$ の2組である。

[3] 異なる3点とあるので、 $z \neq 0, z \neq 1, z \neq -1 \dots \textcircled{1}$ である。

(1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあることと、実数 $r (\neq 0)$ が存在して、

$$z^3 - z^2 = r(z^2 - z) \text{ が成立とが同値であって、}$$

$$z^3 - z^2 = z^2(z-1) = rz(z-1)$$

$$\iff z = r \quad (\because z \neq 0, z \neq 1)$$

すなわち、求める z は

$-1, 0, 1$ 以外の任意の実数

(2) ①と(1)より、3点が三角形の頂点となる条件は z が実数にならないことである。

これより、

$$|z^2 - z| = |z||z-1|, |z^3 - z^2| = |z|^2|z-1|, |z^3 - z| = |z||z-1||z+1|$$

の中で2つが一致するときに二等辺三角形を作るので、

$$\begin{cases} |z||z-1| = |z|^2|z-1| \Rightarrow |z| = 1, & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z|^2|z-1| = |z||z-1||z+1| \Rightarrow |z| = |z+1| & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z||z-1||z+1| = |z||z-1| \Rightarrow |z+1| = 1 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

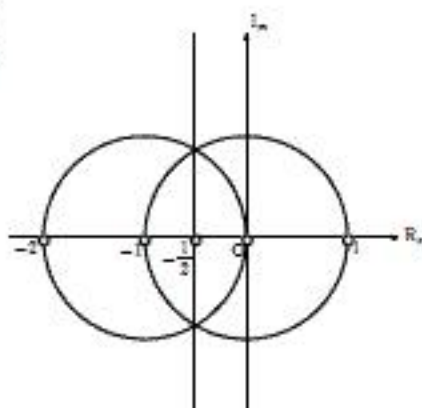
以上から $P(z)$ の全体は右図のようになる。

3点 P, Q, R が正三角形となるには、 z が実数にならず

かつ②と③が成り立てばよいので

図より、

$$\underline{z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

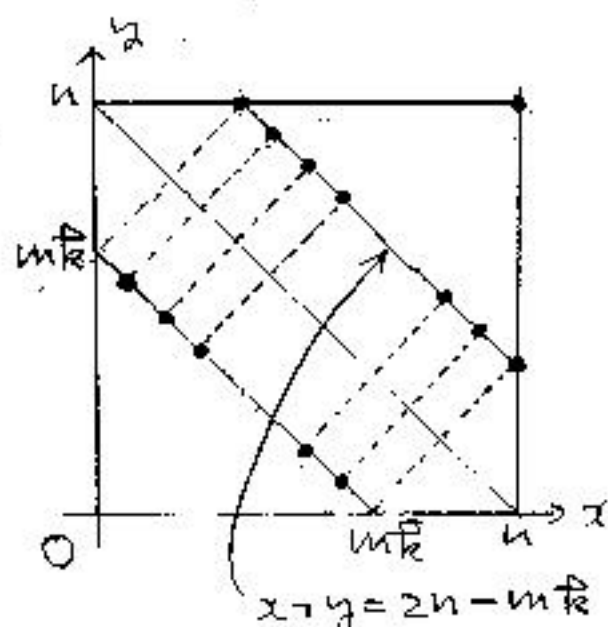


5 (1) $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n$

$$x+y=n, x+y=2n, \dots, x+y=2n$$

にある格子点 (x, y) の個数を数えたい。

右の図で、 $x+y=m$ 上の格子点の個数は 2 個を加えて $x+y=2n-m$ 上の格子点の個数と等しい。 $x+y=m$ 上の格子点の個数は $(m-1)$ 個である。 $x+y=2n-m$ 上の格子点の個数は $2m-1$ 個である。 $m=1, 2, \dots, n-1$



である。 $x+y=n$ 上の $(n-1)$ 個と $(x, y) = (n, n)$ の 1 個を加えて全体の個数となり：

$$\sum_{m=1}^{n-1} 2m + (n-1) + 1$$

$$= \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{n}{2} + n = \frac{n^2}{2} - n + n = \frac{n^2}{2} \text{ (個)}$$

よって、求める確率は (x, y) の全体の個数 n^2 上で割ることから、

$$\frac{\frac{n^2}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}$$

(2) $xy \equiv 0 \pmod{pq}$ について、

(i) $x \equiv 0 \pmod{pq}$ のとき y は任意

(ii) $x \equiv 0 \pmod{p}, x \not\equiv 0 \pmod{q}$ のときは $y \equiv 0 \pmod{q}$

(iii) $x \not\equiv 0 \pmod{p}, x \equiv 0 \pmod{q}$ のときは $y \equiv 0 \pmod{p}$

(iv) $x \not\equiv 0 \pmod{pq}$ のときは $y \equiv 0 \pmod{pq}$

よって、 $1 \sim n$ の中に p の倍数、 q の倍数、 pq の倍数は、それぞれ $\frac{n}{p}$ (個)、 $\frac{n}{q}$ (個)、 $\frac{n}{pq}$ (個) ずつある。

よって、(i), (ii), (iii), (iv) の確率は；

$$(i) \frac{\frac{n}{pq}}{n} \times \frac{n}{n} = \frac{1}{pq}$$

$$(ii) \frac{\frac{n}{p} - \frac{n}{pq}}{n} \times \frac{\frac{n}{q}}{n} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{pq} \right) \times \frac{1}{q} = \frac{q-1}{pq^2}$$

$$(iii) \frac{\frac{n}{q} - \frac{n}{pq}}{n} \times \frac{\frac{n}{p}}{n} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{pq} \right) \times \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p^2q}$$

$$(iv) \frac{n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq} \right)}{n} \times \frac{\frac{n}{pq}}{n} = \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} \right) \times \frac{1}{pq} = \frac{pq-p-q+1}{p^2q^2}$$

ゆえに合計すれば、求める確率は；

$$\frac{pq + p(q-1) + q(p-1) + pq - p - q + 1}{p^2q^2}$$

$$= \frac{4pq - 2p - 2q + 1}{p^2q^2} = \frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}$$