$\boxed{1}$

$$f(x)=x^3-13x$$

とおく。$f(x)$ は奇関数だから，$k<0$ の場合を考察すれば，$k>0$ のときは対称性を用いることができる。したがって，$k<0$ の場合を考える。このとき，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになるから，

$$f(x)=-k$$

が整数解を持つならば，

$$x=-1,-2,-3$$

のいずれからが必ず含まれる。

（ｉ） $x=-1$ を解に持つとき

$$k=-f(-1)=-12$$

であるから，

$$f(x)+k=x^3-13x-12=(x+1)(x+3)(x-4)$$

となるので，残りの整数解は

$$x=-3,4$$

となる。また，$x=-3$ を解に持つことから，$x=-3$ を解に持つ場合も含んでいる。

（ⅱ） $x=-2$ を解に持つとき

$$k=-f(-2)=-18$$

なので，

$$f(x)+k=x^3-13x-18=(x+2)(x^2-2x-9)$$

となる。ここで，

$$x^2-2x-9=0$$

は整数解を持たないので，この場合は不適である。

以上より，$k=-12$ のときに整数解

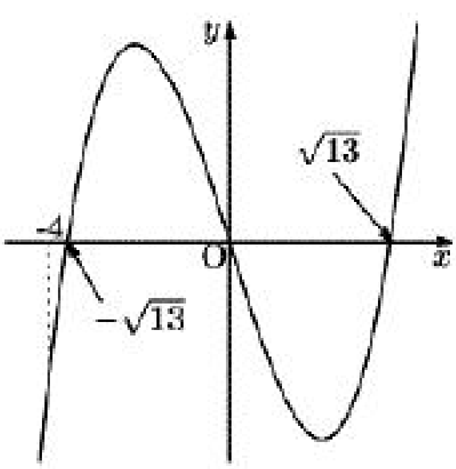
$$x=-1,-3,4$$

を持つので，対称性から，$k=12$ のときに整数解

$$x=1,3,-4$$

を持つ。

（答） $x=-1,-3,4$ $(k=-12)$，$x=1,3,-4$ $(k=12)$



$\boxed{2}$

(1)
直線 AN の方程式は

$$x=a(1-y)$$

である。これと $x^2+y^2=1$ を連立させると

$$(a^2+1)y^2-2a^2y+a^2-1=0$$

となり，これが直線 AN と円の交点の y 座標を与える方程式であり，$y=1$ を代入すると成り立つことから，もう一つの解を t とおくと，解と係数の関係より

$$1+t=\frac{2a^2}{a^2+1}\Leftrightarrow t=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

となる。したがって求める座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{2a}{a^2+1},\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

(答)　$\mathrm{P}\left(\frac{2a}{a^2+1},\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

(2)
(1)と同様にして，Q の座標は

$$\left(\frac{2b}{b^2+1},\frac{b^2-1}{b^2+1}\right)$$

である。条件より，三角形 NAQ と三角形 NPB は相似なので，

$$\mathrm{NA}:\mathrm{NP}=\mathrm{NQ}:\mathrm{NB}$$

である。したがって，

$$\mathrm{NP}=\frac{2}{\sqrt{a^2+1}},\quad \mathrm{NQ}=\frac{2}{\sqrt{b^2+1}}$$

より，

$$\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{b^2+1}=2$$

を得る。これはつまり

$$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$$

ということである。以上で結論を得る。

(証明完了)

(3)
三角形 NAB に対して余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AN}^2+\mathrm{BN}^2-2\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow(a-b)^2=(1+a^2)+(1+b^2)-2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow ab=\sqrt{2}-1$$

を得る。一方，三角形 ABN の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{ON}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}\sin 45^\circ$$

であることから，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(b-a)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b-a=\sqrt{2}$$

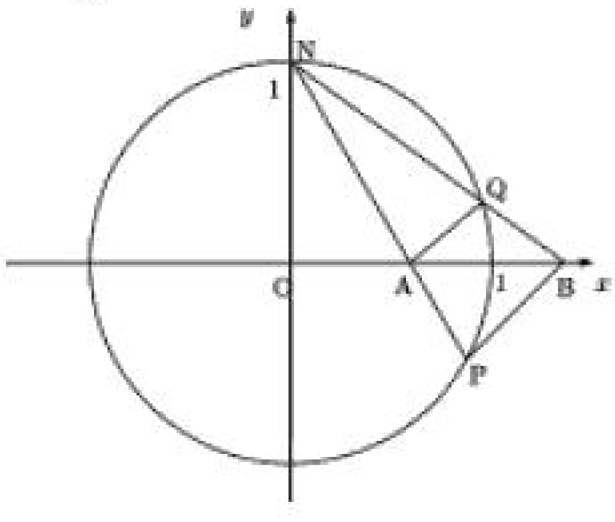
となる。以上を連立して解くと，$0<a<1$ に注意して，

$$a=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2}\left(=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}\right)$$

を得る。

(答)　$a=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2}\left(=\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}\right)$

図



3

(1)

$$\sin(\alpha+180°)=-\sin\alpha$$

であるから，

$$\begin{aligned}f_5(\theta)&=\sum_{k=0}^{5}\sin(\theta+60°\cdot k)\\&=\sum_{k=0}^{2}\sin(\theta+60°\cdot k)+\sum_{k=0}^{2}\sin(\theta+60°\cdot k+180°)\\&=\sum_{k=0}^{2}\sin(\theta+60°\cdot k)-\sum_{k=0}^{2}\sin(\theta+60°\cdot k)\\&=0\end{aligned}$$

である。

(答)　0

(2)

(1)より，

$$f_4(\theta)=-\sin(\theta+300°)$$

であるから，最大となるのは $\theta=330°$ のときで，最大値は 1 である。

(答)　最大値：1 $(\theta=330°)$

(3)

まず，

$$f_{m+6}(\theta)=f_m(\theta)$$

であることに注意すると，$m=0,1,2,3,4,5$ のときを検証すればよい。

$m=5$ のときは $f_m(\theta)=0$ なので最大値も 0 である。(2)より $f_4(\theta)$ の最大値は 1 である。そこで，残りの場合を考える。

(ⅰ)　$m=0$ のとき

$$f_0(\theta)=\sin\theta$$

なので，最大値は 1 である。

(ⅱ)　$m=1$ のとき

$$\begin{aligned}f_1(\theta)&=\sin\theta+\sin(\theta+60°)\\&=2\cos30°\sin(\theta+30°)\\&=\sqrt{3}\sin(\theta+30°)\end{aligned}$$

であるから，最大値は $\sqrt{3}$ である。

(ⅱ)　$m=2$ のとき

$$\begin{aligned}f_2(\theta)&=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)\\&=2\sin(\theta+60°)\end{aligned}$$

より，最大値は 2 である。

(ⅲ)　$m=3$ のとき

$$\begin{aligned}f_3(\theta)&=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)+\sin(\theta+180°)\\&=\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)\\&=f_1(\theta+60°)\end{aligned}$$

なので，最大値は $\sqrt{3}$ である。

以上の考察より，m，θ を同時に動かした場合の最大値は 2 である。

(答)　2

$\boxed{4}$

(1)

$f(x)=g(x)$ が 2 つの実数解を持てばよい。この方程式は

$$3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0$$

と書けるので，この判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=4a^2-5a^2+9>0$$

となる。これより

$$-3<a<3$$

を得る。

(答)　$-3<a<3$

(2)

2 つの解を α，β　(α＜β) とすると，図より，面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta \left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-3\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}$$

である。ここで

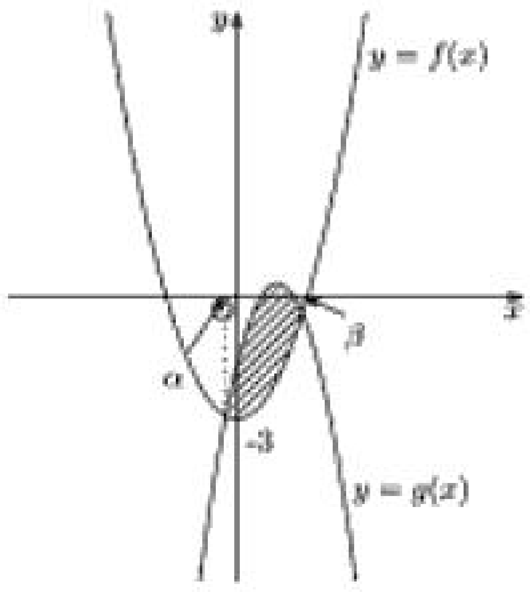
$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4-\frac{4}{9}a^2$$

なので，

$$S=\frac{4}{27}\left(9-a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

(答)　$S=\frac{4}{27}\left(9-a^2\right)^{\frac{3}{2}}$



(3)

ある C_a に点 (p,q) が含まれるということは，

$$f(p)\leqq q\leqq g(p)$$

となるような a が $-3<a<3$ に存在することと同値である。

まず $f(p)\leqq q$ であることから，

$$q\geqq p^2-3$$

を得る。次に $g(p)\geqq q$ であることから，

$$2p^2-4ap+\frac{5}{3}a^2+q\leqq 0$$

を得る。このような a が存在するということは，a についての二次方程式

$$h(a)=2p^2-4ap+\frac{5}{3}a^2+q=0$$

が $-3<a<3$ の範囲に解を持つということである。ここで，

$$q\geqq p^2-3$$

より，

$$\begin{cases} h(-3)=2p^2+12p+15+q\geqq 3(p+2)^2\geqq 0 \\ h(3)=2p^2-12p+15+q\geqq 3(p-2)^2\geqq 0 \end{cases}$$

であることに注意すると，条件としては

$$h(a)=0$$

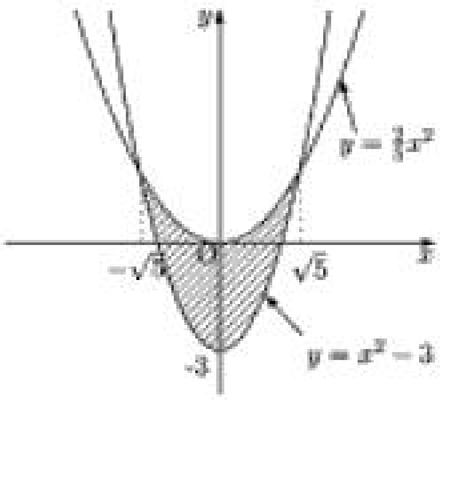
の判別式を D とすると，

$$\begin{cases} D=4p^2-\frac{5}{3}\left(2p^2+q\right)\geqq 0 \\ -3<\frac{6}{5}p<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q\leqq \frac{2}{5}p^2 \\ -\frac{5}{2}<p<\frac{5}{2} \end{cases}$$

である。よって下図の領域を得る。これより求める面積は

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-\left(x^2-3\right)\right\}dx=4\sqrt{5}$$

(答)　$4\sqrt{5}$



$\boxed{5}$

(1)

$n \leqq 7$ のときは，$x_n = 0$ は明らかである。$n \geqq 8$ のとき，n 回目で双方が 4 勝に到達しているのは，

$n-1$ 回目までに A が $n-4$ 勝, B が 3 勝しており，n 回目で B が勝つ。もしくはその逆の場合

である。したがって，求める確率は

$$x_n = \begin{cases} {}_{n-1}\mathrm{C}_3\left\{p^{n-4}(1-p)^4 + p^4(1-p)^{n-4}\right\} & (n \geqq 8) \\ 0 \quad (n \leqq 7) \end{cases}$$

である。

(答) $x_n = \begin{cases} {}_{n-1}\mathrm{C}_3\left\{p^{n-4}(1-p)^4 + p^4(1-p)^{n-4}\right\} & (n \geqq 8) \\ 0 \quad (n \leqq 7) \end{cases}$

(2)

$n \geqq 8$ のとき，

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{{}_n\mathrm{C}_3 2^{-n-1}}{{}_{n-1}\mathrm{C}_3 2^{-n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{n-3}$$

である。

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{n-3} \geqq 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \geqq n$$

より，$n \leqq 5$ において $x_{n+1} > x_n$ であるから，今 $n \geqq 8$ より，

この範囲の n においては

$$x_{n+1} < x_n$$

となる。よって，x_n の最大を与える n は 8 である。

(答) 8