

1 三平方の定理より

$$(1) g^2 + h^2 = p^2 \dots\dots ①$$

($\because$) g, h がともに奇数であると仮定すると,

$$p \text{ は偶数であるから, } p = 2p_1, g = 2g_1 - 1, h = 2h_1 - 1$$

$$(p_1, g_1, h_1 = 1, 2, 3, \dots\dots) \text{ とおく}$$

①に代入すると

$$4(g_1^2 - g_1 + h_1^2 - h_1) + 2 = 4p_1^2$$

右辺は 4 の倍数で、左辺は 4 の倍数でないことより矛盾。

よって、 g, h のどちらかは偶数 ④

$$(2) p + g + h = 132 \dots\dots ②$$

g, h がともに偶数であるとすると、 p も偶数になり、

少なくとも 2 が素数で、かつ $g < p, h < p$ が成り立つことから

$$g = 2, h = 2, p = 128$$

これは ①をみたさず矛盾。

よって、 g, h の一方が偶数で他方が奇数、 p は奇数。

• $g = 2g_1$ ($g_1 = 1, 2, 3, \dots$) のとき、 h は奇数

$$②より p = 132 - (g + h)$$

を①に代入して、

$$g^2 + h^2 = \{132 - (g + h)\}^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 + h^2 - 132(g + h) + 66 \cdot 132 = 0$$

$$\Leftrightarrow (g - 132)(h - 132) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$

$g = 2g_1$ を代入して、

$$(g_1 - 66)(\underbrace{h - 132}_{\text{奇数}}) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$

右辺と左辺を比較して、 $g_1 - 66$ は偶数。よって g_1 は偶数

$$g_1 = 2g_2 \quad (g_2 = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおくと, } (g = 4g_2)$$

よって代入して、

$$(\underbrace{33 - g_2}_{\text{奇数}})(\underbrace{132 - h}_{\text{奇数}}) = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \dots\dots ③$$

②より $4 \leq g \leq 128$ (g は 4 の倍数)、 $1 \leq h \leq 127$ だから

$$1 \leq g_2 \leq 32 \Leftrightarrow 1 \leq \underbrace{33 - g_2}_{\text{偶数}} \leq 31, \quad 5 \leq \underbrace{132 - h}_{\text{奇数}} \leq 131$$

であることに注意して、③より

$$(33 - g_2, 132 - h) = (\underbrace{2 \times 3^2}_{(18, 12)}, \underbrace{11^2}_{(11, 121)}), (\underbrace{2 \times 11}_{(22, 99)}, \underbrace{3^2 \times 11}_{(9, 99)})$$

の組合せで、

$$(g_2, h) = (15, 11), (11, 33)$$

を棄却する

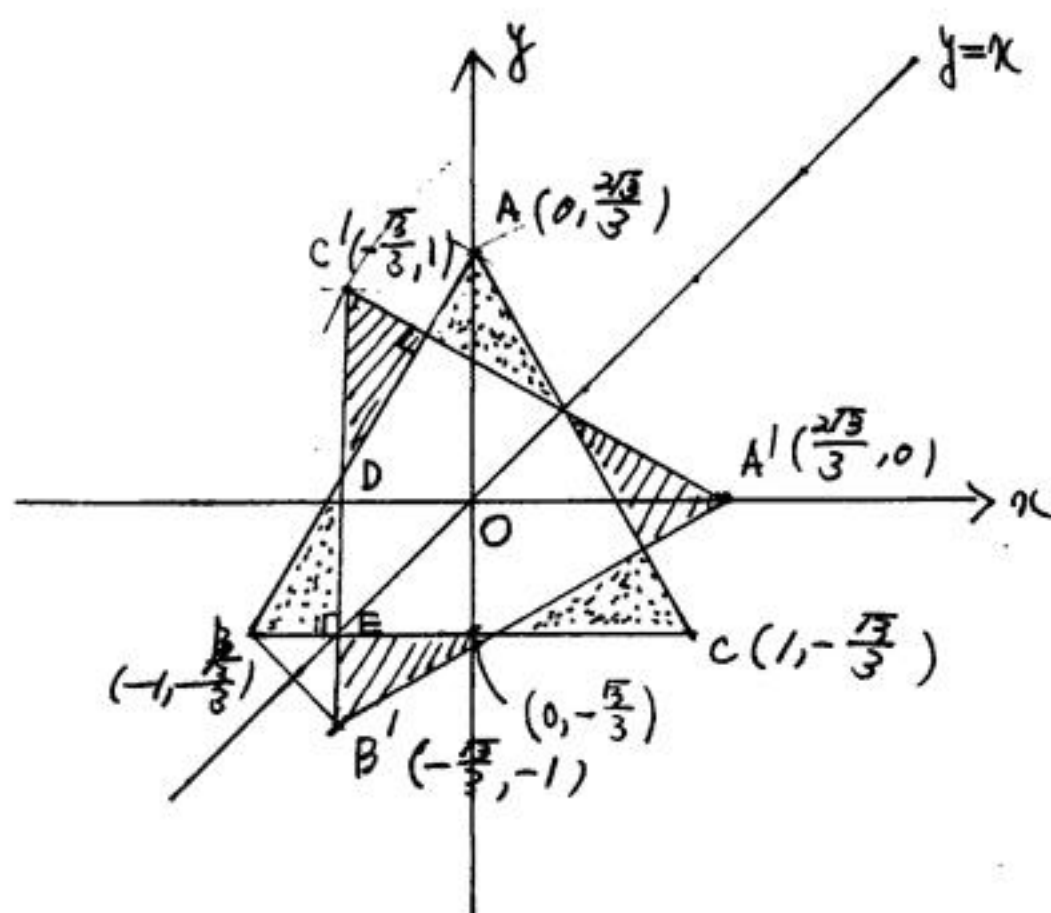
後者は g, h が素数でないから不適。

$$\text{よって, } (g_2, h) = (15, 11) \quad \therefore (p, g, h) = (61, 60, 11)$$

61, 11 は素数であるから適する。

• h が偶数のときも考えて

$$\underline{(p, g, h) = (61, 60, 11), (61, 11, 60)} \dots\dots \text{ [答]}$$



- (1) 点 $C(1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ を $y=x$ に関して対称点は, x, y を入れかえて,
 $C'(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ (答)

- (2) 直線 $y=x$ に関する対称移動により, 正三角形は合同な正三角形に移り, 重心 O は $y=x$ 上にいるから, 動かない.
 $\angle A'OA = 90^\circ$ であるから, $\triangle A'C'B'$ を O のまわり 90° 回転すると $\triangle ABC$ になる.

よって, 求める面積は $\triangle ABC - 3 \times \triangle DBE$

$$BE = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1, \quad DE = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) \text{ であるから}$$

$$\triangle DBE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

求める面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \underline{3 - \sqrt{3}} \dots \text{(答)}$$

3

$$(1) \vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$|\vec{z}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 9$$

(等号は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が同じ向きするとき成り立つ)

また,

$$|\vec{z}| \geq ||\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{c}|| = |\underbrace{|\vec{a} + \vec{b}|}_{\geq 2} - 1| \geq 1$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \geq 2$$

(等号は $\vec{a}, \vec{b}$ が逆向き, $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{c}$ が逆向きするとき, あるいは $\vec{b}, \vec{c}$ が同じ向き, $\vec{a}$ がそれと逆向きするとき成り立つ)

以上より $|\vec{z}|$ の最大値 9, 最小値 1 ... (答)

(2)

$$\vec{a} = (5, 0)$$

$$\vec{b} = (3\cos\theta, 3\sin\theta), \vec{c} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

と置いても一般性を失わない.

$$\text{このとき, } \vec{z} = (5 + 3\cos\theta + \cos\alpha, 3\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{z} = 20 \Leftrightarrow 25 + 15\cos\theta + 5\cos\alpha = 20$$

$$\text{から } \cos\alpha = -3\cos\theta - 1 \dots \textcircled{1}$$

このとき,

$$\vec{z} = (-4, 3\sin\theta + \sin\alpha)$$

$$|\vec{z}|^2 = 16 + (3\sin\theta + \sin\alpha)^2$$

$$\text{ここで, } t = 3\sin\theta + \sin\alpha \text{ とおく.}$$

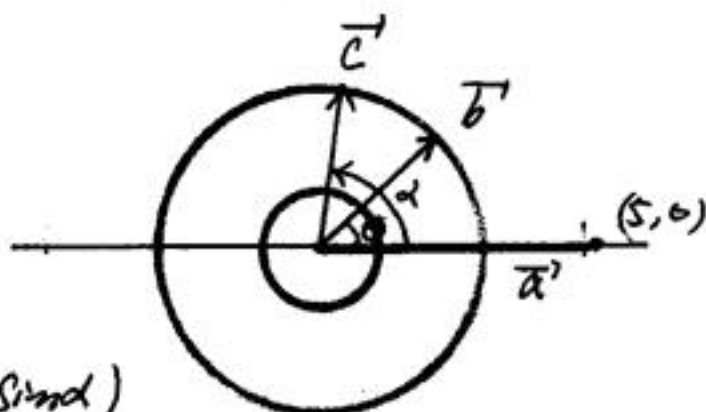
$$\textcircled{1} \text{より } -1 = -3\cos\theta - \cos\alpha \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}^2 + \textcircled{1}^2 \text{より } t^2 + 1 = 10 + 6\cos(\theta - \alpha) \Leftrightarrow t^2 \leq 9 + 6\cos(\theta - \alpha)$$

$$-1 \leq \cos(\theta - \alpha) \leq 1 \text{ より } 3 \leq t^2 \leq 15$$

$$\text{よって, } 19 \leq |\vec{z}|^2 \leq 31 \text{ より } \sqrt{19} \leq |\vec{z}| \leq \sqrt{31}$$

$|\vec{z}|$ の最大値 $\sqrt{31}$
 $|\vec{z}|$ の最小値 $\sqrt{19}$ (答)



4

(1) $y = x^3 - ax$ 上の点 $P(t, t^3 - at)$ における

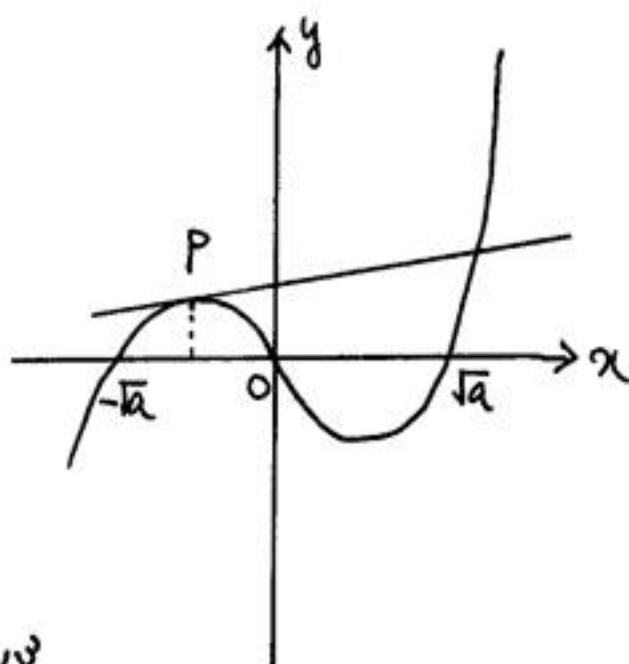
接線は

$$y = (3t^2 - a)(x - t) + t^3 - at \\ = (3t^2 - a)x - 2t^3 \quad \dots \textcircled{1}$$

この直線が点 $(0, 2b^3)$ を通ることから、

$$-2t^3 = 2b^3 \Leftrightarrow t = -b$$

$$\textcircled{1} \text{ に } t = -b \text{ を代入して、 } y = (3b^2 - a)x + 2b^3 \quad \dots \text{ (答) }$$



(2) 点 P, Q の座標は

$$x^3 - ax = (3b^2 - a)x + 2b^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3b^2x - 2b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+b)^2(x-2b) = 0, \quad x = -b, 2b$$

$$b > 0 \text{ とき } P(-b, -b^3 + ab), Q(2b, 8b^3 - 2ab) \quad \dots \text{ (答) }$$

$$(3) \overrightarrow{OP} = (-b, -b(b^2 - a))$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2b, 2b(4b^2 - a))$$

$$\angle POQ = 90^\circ \text{ とき } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \Leftrightarrow -2b^2 - 2b^2(b^2 - a)(4b^2 - a) = 0$$

$$b > 0 \text{ とき } (b^2 - a)(4b^2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^4 - 5ab^2 + a^2 + 1 = 0$$

$$b^2 = t \text{ とおくと、 } t > 0 \text{ で}$$

$$4t^2 - 5at + a^2 + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

② が $t > 0$ の実数解をもつ条件を求めたい。

$$\textcircled{2} \text{ の 2 解を } \alpha, \beta \text{ とすると、 } \alpha + \beta = \frac{5a}{4} > 0, \alpha\beta = \frac{a^2 + 1}{4} > 0$$

より ② の判別式を D とすると、

$$D = 25a^2 - 16(a^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{16}{9}$$

をみたせばよく、 $a > 0$ とき

$$\underline{a \geq \frac{4}{3}} \quad \dots \text{ (答) }$$

5

(1) $n \leq X_n$ であるから

$X_n = n, n+1, n+2, n+3$ を考えればよい.

(i) $X_n = n$ のとき, n 回とも 1 のカードで 1 通り $\dots \frac{1}{4^n}$

(ii) $X_n = n+1$ のとき,
 $n-1$ 回 1 のカード, 1 回 2 のカード
 $nC_1 = n$ 通り $\dots \frac{n}{4^n}$

(iii) $X_n = n+2$ のとき,

• $n-1$ 回 1 のカード, 残り 1 回で 3 のカードで n 通り $\dots \frac{n}{4^n}$

• $n-2$ 回 1 のカード, 残り 2 回で 4 になるのは,
2, 2 のカードで nC_2 通り $\dots \frac{nC_2}{4^n}$

(iv) $X_n = n+3$ のとき,

• $n-1$ 回 1 のカード, 残り 1 回で 4 のカードで n 通り $\dots \frac{n}{4^n}$

• $n-2$ 回 1 のカード, 残り 2 回で 5 になるのは
2, 3 のカードで $nC_1 \cdot nC_1$ $\dots \frac{n \cdot (n-1)}{4^n}$
 (通り)

• $n-3$ 回 1 のカード, 残り 3 回で 6 になるのは
2, 2, 2 のカードで nC_3 通り $\dots \frac{nC_3}{4^n}$

求める確率は

$$\frac{1 + 3n + n \cdot (n-1) + nC_2 + nC_3}{4^n} = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6 \cdot 4^n} \quad (n \geq 3)$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1}} (n+1)(n+2)(n+3) \quad (n=1, 2 \text{ で成り立つ})$$

(2) Y_n が 8 で割り切れないのは,

$\{2 \text{ も } 4 \text{ も出ない}\}, \{4 \text{ は出ない, } 2 \text{ が } 1 \text{ 回か } 2 \text{ 回出る}\}, \{2 \text{ は出ないで, } 4 \text{ が } 1 \text{ 回出る}\}$

のいずれかであるから, 求める確率は ($n \geq 2$)

$$1 - \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{\uparrow \\ \{2 \text{ も } 4 \text{ も} \\ \text{出ない}\}}} + \underbrace{nC_1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 2}_{\substack{\uparrow \\ \{2 \text{ が } 1 \text{ 回,} \\ \text{または } 4 \text{ が } 1 \text{ 回}\}}} + \underbrace{nC_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}_{\substack{\uparrow \\ \{2 \text{ が } 2 \text{ 回}\}}} \right\} = 1 - \frac{n^2 + 7n + 8}{2^{n+3}} \quad (n=1 \text{ で成り立つ})$$