

$$\boxed{1} \quad x^3 + 8x^2 + mx + 60 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(1) $x = a + bi$ が①の解であることより、共役な複素数 $x = a - bi$ も①の解であり、①の他の実数解を t とおくと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} (a+bi) + (a-bi) + t = -8 \\ t(a+bi) + t(a-bi) + (a+bi)(a-bi) = m \\ t(a+bi)(a-bi) = -60 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + t = -8 & \dots \textcircled{2} \\ 2at + a^2 + b^2 = m & \dots \textcircled{3} \\ t \cdot (a^2 + b^2) = -60 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

②より $t = -2(a+4)$ を④に代入して、

$$(a+4) \cdot (a^2 + b^2) = 30$$

$a^2 + b^2 > 0$ より $a+4 > 0$ であるから、かけて30になる組合せは

$$(a+4, a^2 + b^2) = (1, 30), (2, 15), (3, 10), (5, 6) \\ (30, 1), (15, 2), (10, 3), (6, 5)$$

このうち、 a, b ($b \neq 0$) が整数になるものは、

$$(a+4, a^2 + b^2) = (3, 10), (6, 5) \text{ で}$$

$$\cdot (a+4, a^2 + b^2) = (3, 10) \text{ のとき, } a = -1, b = \pm 3, t = -6$$

$$\textcircled{3} \text{ より } m = 22$$

$$\cdot (a+4, a^2 + b^2) = (6, 5) \text{ のとき, } a = 2, b = \pm 1, t = -12$$

$$\textcircled{3} \text{ より } m = -43$$

$$\text{以上より } m = 22, -43 \dots (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} m = 22 \text{ のとき, ①の解は, } & -1-3i, -1+3i, -6 \\ m = -43 \text{ のとき, ①の解は, } & 2-i, 2+i, -12 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} m = 22 \text{ のとき, ①の解は, } \\ m = -43 \text{ のとき, ①の解は, } \end{aligned}} \right\} \dots (\text{答})$$

2

$$H_n: y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$$

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 4a_n \dots \textcircled{1}$$

$$b_1 = 3, b_{n+1} = b_n + 2a_n \dots \textcircled{2}$$

$$c_1 = 4, c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + a_n + b_n \dots \textcircled{3}$$

$$(1) \textcircled{1} \text{より} \quad a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$\textcircled{2} \text{より} \quad b_{n+1} = b_n + 4^n$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき, } b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 3 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^n + 5) \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも成り立ち, $n \geq 1$ で,

$$b_n = \frac{1}{3}(4^n + 5)$$

よって, $\textcircled{3}$ は,

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n + \frac{5}{6} \cdot 4^n + \frac{5}{3}$$

これが

$$c_{n+1} + a \cdot 4^{n+1} + b = \frac{1}{4}(c_n + a \cdot 4^n + b)$$

となるように a, b を決定すると, $a = -\frac{2}{9}, b = -\frac{20}{9}$

よって

$$c_{n+1} - \frac{2}{9} \cdot 4^{n+1} - \frac{20}{9} = \frac{1}{4} \left(c_n - \frac{2}{9} \cdot 4^n - \frac{20}{9} \right)$$

から

$$c_n - \frac{2}{9} \cdot 4^n - \frac{20}{9} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \left(c_1 - \frac{2}{9} - \frac{20}{9} \right) = \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{4^n}$$

$$c_n = \frac{1}{9} \left(2 \cdot 4^n + \frac{32}{4^n} + 20 \right) = \frac{2}{9} \left(4^n + \frac{16}{4^n} + 10 \right)$$

$a_n x^2 + 2b_n x + c_n = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= b_n^2 - a_n c_n = \frac{1}{9} (16^n + 10 \cdot 4^n + 25) - \frac{1}{9} (16^n + 16 + 10 \cdot 4^n) \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

$\therefore H_n$ は x 軸と 2 点で交わる.

$$(2) a_n x^2 + 2b_n x + c_n = 0 \text{ の 2 解は } x = \frac{-b_n - \sqrt{b_n^2 - a_n c_n}}{a_n} = \frac{-b_n - 1}{a_n}$$

$$x = \frac{-b_n + \sqrt{b_n^2 - a_n c_n}}{a_n} = \frac{-b_n + 1}{a_n}$$

$$\text{よって, } P_n Q_n = \frac{2}{a_n} = \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n P_k Q_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} \dots (\text{答})$$

別解 漸化式を解くことなく次のように解いてもよい.

$$(1) \frac{D_n}{4} = b_n^2 - a_n c_n = d_n \text{ と解くと, } \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より}$$

$$d_{n+1} = b_{n+1}^2 - a_{n+1} c_{n+1}$$

$$= (b_n + 2a_n)^2 - 4a_n \left(\frac{c_n}{4} + a_n + b_n \right)$$

$$= b_n^2 - a_n c_n = d_n \quad \therefore d_n = d_1 = 9 - 2 \cdot 4 = 1 > 0$$

よって, H_n は x 軸と 2 点で交わる.

(1) $\triangle OPQ$ の面積を S_0 、線分 OQ と C で囲まれた面積を S_1 とすると、

$P(p, ap^2 + bp)$, $Q(q, aq^2 + bq)$ であるから、

$$S_0 = \frac{1}{2} |q(ap^2 + bp) - p(aq^2 + bq)|$$

$$= \frac{1}{2} apq(q - p)$$

$$S_1 = \int_0^q \{(aq + b)x - (ax^2 + bx)\} dx$$

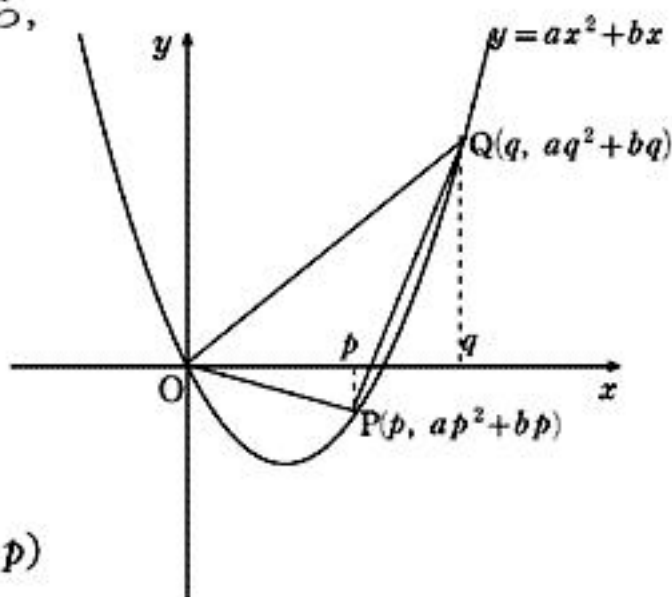
$$= -\int_0^q x \cdot (x - q) dx = \frac{1}{6} aq^3$$

$$S_1 = \frac{3}{2} S_0 \text{ より } \frac{1}{6} aq^3 = \frac{3}{4} apq(q - p)$$

$$a > 0, q > 0 \text{ より } 2q^2 = 9p(q - p)$$

$$2q^2 - 9pq + 9p^2 = 0 \iff (2q - 3p)(q - 3p) = 0$$

$$\therefore q = \frac{3}{2}p, q = 3p \dots (\text{答})$$



(2) q を固定したとき, $0 < p < q$ で

$$S_0 = \frac{1}{2} aq(-p^2 + qp)$$

$$= \frac{1}{2} aq \left[-\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{4} \right]$$

$p = \frac{q}{2}$ で最大となる.

$$\text{このとき, } S_0 = \frac{1}{8} aq^3$$

また (1) より $S_1 = \frac{1}{6} aq^3$ であるから、

$$S_0 : S_1 = \frac{1}{8} aq^3 : \frac{1}{6} aq^3 = 3 : 4 \dots (\text{答})$$

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ なる } x \text{ は } x = 0, 2a$$

$$f(0) = a, f(2) = 8 - 11a, f(2a) = -4a^3 + a$$

(i) $a = 0$ のとき, $f'(x) \geq 0$ で $f(x)$ は単調に増加する関数で, 最大値 $f(2) = 8$ となり不適.

(ii) $0 < a$ のとき,

最大になるのは $x = 0$ または $x = 2$ のときであり,

$$f(0) \geq f(2) \text{ となる } a \text{ の範囲は, } a \geq 8 - 11a \iff a \geq \frac{2}{3}$$

(i) $a \geq \frac{2}{3}$ のとき,

$$\text{最大値 } f(0) = a = 105 \quad \therefore a = 105$$

(ii) $0 < a < \frac{2}{3}$ のとき,

$$\text{最大値 } f(2) = 8 - 11a = 105, a = -\frac{97}{11} \text{ より不適.}$$

(iii) $a < 0$ のとき,

最大になるのは $x = 2a$ または $x = 2$ のときであり,

$f(2a) \geq f(2)$ となる a の範囲は,

$$-4a^3 + a \geq 8 - 11a \iff 4a^3 - 12a + 8 \leq 0$$

$$\iff (a-1)^2(a+2) \leq 0 \text{ から } a \leq -2$$

(i) $a \leq -2$ のとき,

$$\text{最大値 } f(2a) = -4a^3 + a = 105$$

$$\iff (a+3) \cdot \left\{ 4 \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + 26 \right\} = 0 \therefore a = -3$$

(ii) $-2 < a < 0$ のとき,

$$\text{最大値 } f(2) = 8 - 11a = 105, a = -\frac{97}{11} \text{ より不適.}$$

以上より, $a = -3, 105 \dots$ (答)

操作を3回実行したときのカードの取り出し方が n^3 通り

(1)

・ a, b, c が3枚とも異なるカードで1枚が k となる場合の数は

$$({}_{k-1}C_1 \times {}_{n-k}C_1 \times 1) \times 3! = 6(k-1)(n-k)$$

・ a, b, c のうち2枚が k で他の1枚が k 以外となる場合の数は

$$({}_{n-1}C_1) \times \frac{3!}{2!} = 3(n-1)$$

・ a, b, c のすべてが k である場合が1通り

求める確率 p_k ($1 \leq k \leq n$) は

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{n^3} \{6(k-1)(n-k) + 3(n-1) + 1\} \\ &= \frac{1}{n^3} \{-6k^2 + 6(n+1)k - 3n - 2\} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1)より

$$p_k = \frac{1}{n^3} \left\{ -6 \left(k - \frac{n+1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}(3n^2 - 1) \right\}$$

これが最大になるのは

$$\left. \begin{aligned} n \text{ が奇数のとき, } k &= \frac{n+1}{2} \\ n \text{ が偶数のとき, } k &= \frac{n+1}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}, \frac{n}{2} \end{aligned} \right\} \dots (\text{答})$$