

数 問

数 学

19 年 度(前期)

注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊（本文 2 ページ，白紙 2 枚），解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

（例） 受験番号 50001 番の場合 →

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所にも書いても無効である。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 m を整数とし、 $f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする。

- (1) 整数 a と、0 ではない整数 b で、 $f(a + bi) = 0$ をみたすものが存在するよ
うな m をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。
- (2) (1) で求めたすべての m に対して、方程式 $f(x) = 0$ を解け。

2 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める。放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする。

- (1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。
- (2) H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする。 $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ。

3 放物線 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) を C とする。 C 上に異なる 2 点 P, Q をとり、
その x 座標をそれぞれ p, q ($0 < p < q$) とする。

- (1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が、 $\triangle OPQ$ の面積の $\frac{3}{2}$ 倍であるとき、 p と q の関係を求めよ。ただし、 O は原点を表す。
- (2) Q を固定して P を動かす。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また、そのときの $\triangle OPQ$ の面積と、線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

- 4 a を定数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする。 $x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。

- 5 1 が書かれたカードが 1 枚、2 が書かれたカードが 1 枚、 $\dots$ 、 n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出し元にもどす操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき、得点 X を次の規則 (i), (ii) に従って定める。

- (i) a, b, c がすべて異なるとき、 X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。
- (ii) a, b, c のうちに重複しているものがあるとき、 X はその重複した値とする。

$1 \leq k \leq n$ をみたす k に対して、 $X = k$ となる確率を p_k とする。

- (1) p_k を n と k で表せ。
- (2) p_k が最大となる k を n で表せ。