

$$\boxed{1} \quad m \geq 2, n \geq 2$$

$$m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3 \iff (m-n)(m^2 + mn + n^2) = 999 \quad \dots \textcircled{1}$$

$m-n \geq 9$ とすると, $m \geq n+9 \geq 11$ となるから,

$$m^2 + mn + n^2 \geq 11^2 + 11 \cdot 2 + 2^2 = 147$$

となり,

$$(m-n)(m^2 + mn + n^2) > 999$$

であるから, 不適となる. したがって, $m-n < 9$ となる.

(i) $m-n=1$ の場合

$$m^2 + mn + n^2 = (n+1)^2 + (n+1)n + n^2 = 3(n^2 + n) + 1$$

であるから, ①は,

$$3(n^2 + n) + 1 = 999$$

となるが, 左辺は 3 で割ると 1 余り, 右辺は 3 の倍数であり,
これは不適.

(ii) $m-n=3$ の場合

$$m^2 + mn + n^2 = (n+3)^2 + (n+3)n + n^2 = 3(n^2 + 3n + 3)$$

であるから, ①は,

$$9(n^2 + 3n + 3) = 999 \iff n^2 + 3n - 108 = 0$$

$$\iff (n+12)(n-9) = 0$$

$n \geq 2$ をみたす n は, $n=9$

以上から, $(m, n) = (12, 9) \dots \dots \dots$ (答)

$$(1) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\theta + \alpha)$$

となるから、この式の最小値は $-\sqrt{x^2 + y^2}$ 、最大値は $\sqrt{x^2 + y^2}$ となる。
したがって、任意の θ に対して与えられた不等式が成立するのは、

$$「-2 \leq -\sqrt{x^2 + y^2}」 \text{ かつ } 「\sqrt{x^2 + y^2} \leq y+1」$$

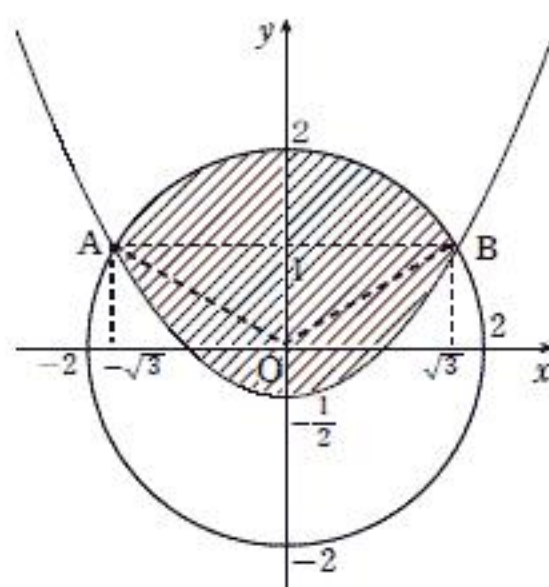
$$\iff 「x^2 + y^2 \leq 4」 \text{ かつ } 「y \geq \frac{1}{2}(x^2 - 1) \text{ かつ } y \geq -1」$$

のときであり、求める領域は図の斜線部（境界を含む）となる。

$$A(-\sqrt{3}, 1), B(\sqrt{3}, 1) \text{ とすると, } \angle AOB = 120^\circ$$

であるから、面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right\} dx + \text{扇形} OAB - \triangle OAB \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) dx \\ &\quad + 2^2 \pi \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (2\sqrt{3})^3 + \frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



$$(2) \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1, -1 \leq \sin \beta \leq 1 \quad \text{であるから,}$$

$$-x^2 \leq x^2 \cos \alpha \leq x^2, \begin{cases} y \geq 0 \text{ のとき } -y \leq y \sin \beta \leq y \\ y \leq 0 \text{ のとき } y \leq y \sin \beta \leq -y \end{cases}$$

となる。よって、 $x^2 \cos \alpha + y \sin \beta$ の最小値は、

$$\begin{cases} y \geq 0 \text{ のとき } -x^2 - y \\ y \leq 0 \text{ のとき } -x^2 + y \end{cases}$$

$x^2 \cos \alpha + y \sin \beta$ の最大値は、

$$\begin{cases} y \geq 0 \text{ のとき } x^2 + y \\ y \leq 0 \text{ のとき } x^2 - y \end{cases}$$

となる。したがって、任意の α, β に対して与えられた不等式が成り立つのは、

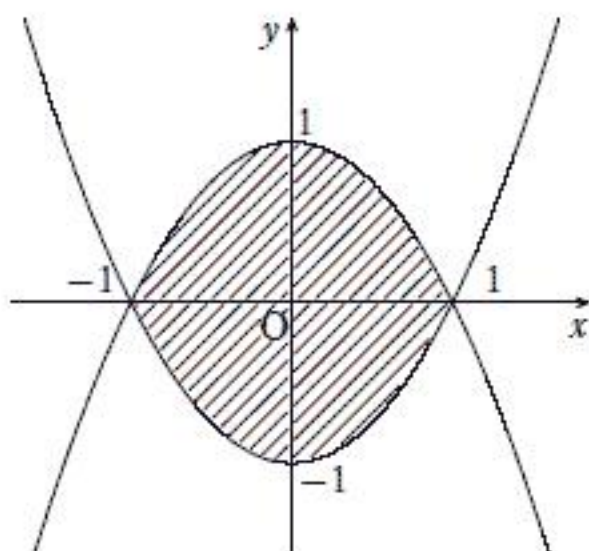
$$\begin{cases} y \geq 0 \text{ のとき } -1 \leq -x^2 - y \text{ かつ } x^2 + y \leq 1 \iff y \leq -x^2 + 1 \\ y \leq 0 \text{ のとき } -1 \leq -x^2 + y \text{ かつ } x^2 - y \leq 1 \iff y \geq x^2 - 1 \end{cases}$$

のときであり、求める領域は図の斜線部（境界を含む）

となる。

求める面積は、

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = 4 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 4 \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{8}{3} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



3 放物線 $y = x^2 - 2px + q = (x-p)^2 - p^2 + q \cdots \cdots ①$ の頂点の座標を (X, Y) とすると,

$$X = p, Y = -p^2 + q \quad \therefore p = X, q = X^2 + Y \quad \cdots \cdots ②$$

となる.

I. ①上の点を $P(x, y)$, $A(p, 2q)$ とおく.

①より, $(x-p)^2 = y + p^2 - q$ であるから,

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x-p)^2 + (y-2q)^2 \\ &= y + p^2 - q + (y-2q)^2 \\ &= \left(y - \frac{4q-1}{2}\right)^2 + p^2 + q - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

これを $f(y)$ とおくと, 放物線①と A を中心とする半径 1 の円が共有点をもつのは,

$$「y \geq -p^2 + q \text{ における } f(y) \text{ の最小値} \leq \text{半径 } 1」\cdots \cdots ③$$

となるときである.

(i) $\frac{4q-1}{2} < -p^2 + q$ すなわち $q < -p^2 + \frac{1}{2} \cdots \cdots ④$ のとき,

$y \geq -p^2 + q$ における $f(y)$ の最小値は $f(-p^2 + q)$ であるから, ③は

$$\begin{aligned} f(-p^2 + q) &\leq 1 \iff (p^2 + q)^2 \leq 1 \\ &\iff -1 \leq p^2 + q \leq 1 \\ &\iff -p^2 - 1 \leq q \leq -p^2 + 1 \quad \cdots \cdots ⑤ \end{aligned}$$

となる. ④, ⑤より

$$-p^2 - 1 \leq q < -p^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ⑥$$

(ii) $\frac{4q-1}{2} \geq -p^2 + q$ すなわち $q \geq -p^2 + \frac{1}{2} \cdots \cdots ⑦$ のとき,

$y \geq -p^2 + q$ における $f(y)$ の最小値は $f\left(\frac{4q-1}{2}\right)$ であるから, ③は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4q-1}{2}\right) &\leq 1 \iff p^2 + q - \frac{1}{4} \leq 1 \\ &\iff q \leq -p^2 + \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots ⑧ \end{aligned}$$

となる. ⑦, ⑧より

$$-p^2 + \frac{1}{2} \leq q \leq -p^2 + \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots ⑨$$

(i), (ii) から③が成り立つのは⑥または⑨のときで,

$$-p^2 - 1 \leq q \leq -p^2 + \frac{5}{4}$$

②を代入して整理すると

$$-2X^2 - 1 \leq Y \leq -2X^2 + \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots ⑩$$

II. $B(p, p)$ とおくと, I と同様にして,

$$BP^2 = \left(y - \frac{2p-1}{2}\right)^2 + p^2 + p - q - \frac{1}{4}$$

これを $g(y)$ とおくと, 放物線①と B を中心とする半径 1 の円が共有点をもつのは,

$$「y \geq -p^2 + q \text{ における } g(y) \text{ の最小値} \leq \text{半径 } 1」\cdots \cdots ⑪$$

となるときである.

(iii) $\frac{2p-1}{2} < -p^2 + q$ すなわち $q > p^2 + p - \frac{1}{2} \cdots \cdots ⑫$ のとき,

$g(y)$ の最小値は $g(-p^2 + q)$ であるから, ⑪は

$$\begin{aligned} g(-p^2 + q) &\leq 1 \iff (q - p^2 - p)^2 \leq 1 \\ &\iff -1 \leq q - p^2 - p \leq 1 \\ &\iff p^2 + p - 1 \leq q \leq p^2 + p + 1 \quad \cdots \cdots ⑬ \end{aligned}$$

となる. ⑫, ⑬より

$$p^2 + p - \frac{1}{2} < q \leq p^2 + p + 1 \quad \cdots \cdots ⑭$$

(iv) $\frac{2p-1}{2} \geq -p^2 + q$ すなわち $q \leq p^2 + p - \frac{1}{2} \cdots \cdots ⑮$ のとき,

$g(y)$ の最小値は $g\left(\frac{2p-1}{2}\right)$ であるから, ⑪は

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2p-1}{2}\right) &\leq 1 \iff p^2 + p - q - \frac{1}{4} \leq 1 \\ &\iff q \geq p^2 + p - \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots ⑯ \end{aligned}$$

となる. ⑮, ⑯より

$$p^2 + p - \frac{5}{4} \leq q \leq p^2 + p - \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ⑰$$

(iii), (iv) から⑪が成り立つのは, ⑭または⑰のときで,

$$p^2 + p - \frac{5}{4} \leq q \leq p^2 + p + 1$$

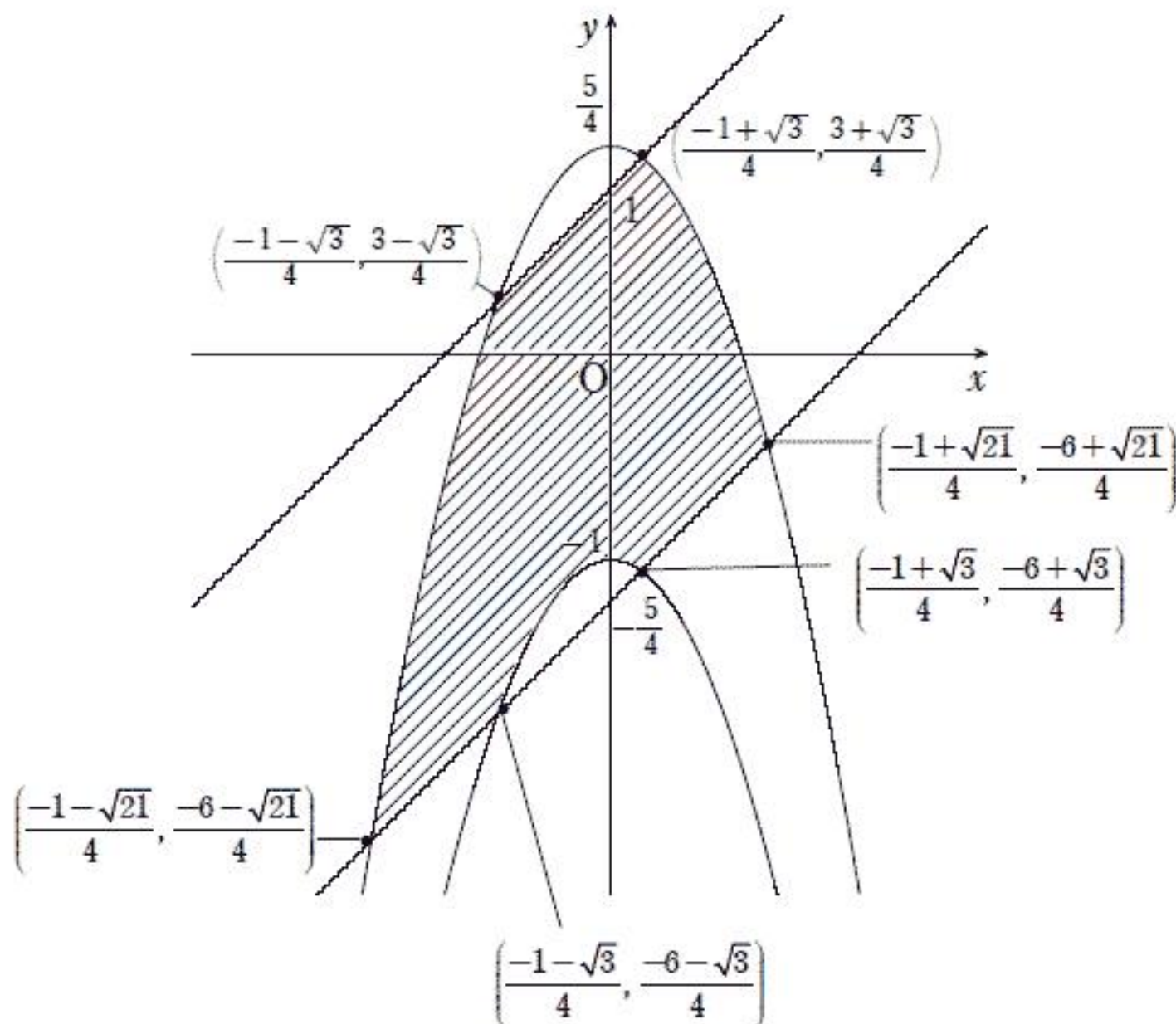
②を代入して整理すると

$$X - \frac{5}{4} \leq Y \leq X + 1 \quad \cdots \cdots ⑱$$

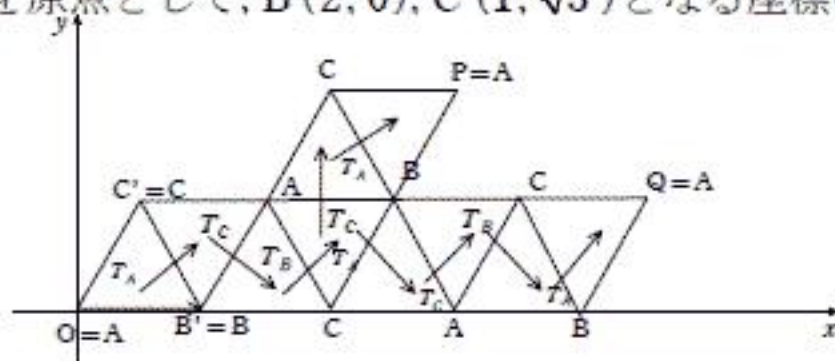
I, II から, 求める領域は⑩かつ⑱より,

$$-2x^2 - 1 \leq y \leq -2x^2 + \frac{5}{4} \quad \text{かつ} \quad x - \frac{5}{4} \leq y \leq x + 1$$

となり, 図の斜線部となる. 境界を含む.



- (1) O を原点として、 $B'(2, 0)$ 、 $C'(1, \sqrt{3})$ となる座標平面を考える.



$$\overrightarrow{OB'} = (2, 0), \overrightarrow{OC'} = (1, \sqrt{3}) \text{ とすると,}$$

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OB'} + 2\overrightarrow{OC'} = (6, 2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = (9, \sqrt{3})$$

であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{5\sqrt{7}}{14} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (2) 6 回の折り返し操作

$$T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B \cdots \textcircled{1}$$

により、元の $\triangle ABC$ ($\triangle OB'C'$) は
頂点に対応順も含め x 軸方向に
6 行平行移動される.

また、 $\textcircled{1}$ の折り返し操作の逆を行う
ことにより、元の $\triangle ABC$ は x 軸の負の
向きに 6 行平行移動される.

したがって、 $(6k, 0) = k(3\overrightarrow{OB'}) = 3k\overrightarrow{OB'}$
の終点は点 A である.

さらに 6 回の折り返し操作

$$T_A, T_B, T_C, T_A, T_B, T_C \cdots \textcircled{2}$$

により、元の $\triangle ABC$ は $\overrightarrow{OC'}$ の方向に
6 行平行移動される.

また、 $\textcircled{2}$ の折り返し操作の逆を行う
ことにより、元の $\triangle ABC$ は $-\overrightarrow{OC'}$ の
方向に 6 行平行移動される.

したがって、 $(3l, 3\sqrt{3}l) = l(3\overrightarrow{OC'}) = 3l\overrightarrow{OC'}$
の終点は点 A である.

以上から,

$$(6k + 3l, 3\sqrt{3}l) = 3k\overrightarrow{OB'} + 3l\overrightarrow{OC'}$$

により定められる点は、点 A の移り先となる.

(1) X, Y をそれぞれ x, y 回選んだとする.

(i) $(x, y) = (0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$ の $n+1$ 個(答)

(ii) $x = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) として点 P が $(k, n-k)$ に到達する確率を p_k とすると,

$$p_k = {}_n C_k \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

となる. よって,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{n-k}{k+1} \quad \therefore \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \iff k \leq \frac{n-1}{2}$$

となる.

$$n \text{ が奇数のとき} \quad \begin{cases} k \leq \frac{n-3}{2} \text{ のとき, } p_{k+1} > p_k \\ k = \frac{n-1}{2} \text{ のとき, } p_{k+1} = p_k \\ k \geq \frac{n+1}{2} \text{ のとき, } p_{k+1} < p_k \end{cases} \quad \text{となる.}$$

よって, $k = \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}$ で p_k は最大となる.

$$n \text{ が偶数のとき} \quad \begin{cases} k \leq \frac{n-2}{2} \text{ のとき, } p_{k+1} > p_k \\ k \geq \frac{n}{2} \text{ のとき, } p_{k+1} < p_k \end{cases}$$

よって, $k = \frac{n}{2}$ で p_k は最大となる.

以上から, 確率が最大となる点は

$$\begin{cases} \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \right), \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2} \right) & (n \text{ が奇数}) \\ \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right) & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \quad \text{.....(答)}$$

(2) X, Y, Z をそれぞれ x, y, z 回選んだとする.

(i) $z = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, n$) であるとき, $x + y = n - l$ となり (1)(i) から P が到達可能な点は $n - l + 1$ 個ある. したがって, 求める個数は,

$$\sum_{l=0}^n (n-l+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \text{ 個} \quad \text{.....(答)}$$

(ii) $z = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots, n$) であるとき, P が到達する確率が最大である点は, (1)(ii) より

$$\begin{cases} \left(\frac{n-l-1}{2}, \frac{n-l+1}{2} \right), \left(\frac{n-l+1}{2}, \frac{n-l-1}{2} \right) & (n-l \text{ が奇数}) \\ \left(\frac{n-l}{2}, \frac{n-l}{2} \right) & (n-l \text{ が偶数}) \end{cases}$$

である. この点に到達する確率を p_l とすると,

$$p_l = \begin{cases} {}_n C_l \cdot {}_{n-l} C_{\frac{n-l-1}{2}} \cdot \frac{1}{3^n} & (n-l \text{ が奇数}) \\ {}_n C_l \cdot {}_{n-l} C_{\frac{n-l}{2}} \cdot \frac{1}{3^n} & (n-l \text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる.

(I) $n-l$ が奇数の場合

$n-l-1$ が偶数となることに注意して,

$$\frac{p_{l+1}}{p_l} = \frac{{}_n C_{l+1} \cdot {}_{n-l-1} C_{\frac{n-l-1}{2}}}{{}_n C_l \cdot {}_{n-l} C_{\frac{n-l-1}{2}}} = \frac{n-l+1}{2(l+1)}$$

よって,

$$\frac{p_{l+1}}{p_l} \geq 1 \iff l \leq \frac{n-1}{3}$$

となる. n が 3 の倍数であるから, $\frac{n}{3}, \frac{n-3}{3}$ は整数となる. したがって,

$$\begin{cases} l \leq \frac{n-3}{3} \text{ のとき} & p_{l+1} > p_l \\ l \geq \frac{n}{3} \text{ のとき} & p_{l+1} < p_l \end{cases}$$

であるから, $l = \frac{n}{3}$ で p_l は最大となる.

(II) $n-l$ が偶数の場合

$n-l-1$ が奇数となることに注意して,

$$\frac{p_{l+1}}{p_l} = \frac{{}_n C_{l+1} \cdot {}_{n-l-1} C_{\frac{n-(l+1)-1}{2}}}{{}_n C_l \cdot {}_{n-l} C_{\frac{n-l}{2}}} = \frac{n-l}{2(l+1)}$$

よって,

$$\frac{p_{l+1}}{p_l} \geq 1 \iff l \leq \frac{n-2}{3}$$

となる.

n が 3 の倍数であるから, $\frac{n}{3}, \frac{n-3}{3}$ は整数となる. したがって,

$$\begin{cases} l \leq \frac{n-3}{3} \text{ のとき} & p_{l+1} > p_l \\ l \geq \frac{n}{3} \text{ のとき} & p_{l+1} < p_l \end{cases}$$

であるから, $l = \frac{n}{3}$ で p_l は最大となる.

以上, (I), (II) より, $l = \frac{n}{3}$ で確率は最大となり,

このとき, $n-l = \frac{2n}{3}$ は偶数であることから, 求める点は

$$\left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3} \right) \quad \text{.....(答)}$$

となる.