

# 数 問

## 数 学

21 年 度(前期)

### 注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

(例) 受験番号 50001 番の場合 →

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所にも書いても無効である。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 2以上の整数  $m, n$  は  $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$  をみたす。  $m, n$  を求めよ。

2 (1) 任意の角  $\theta$  に対して、  $-2 \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq y + 1$  が成立するような点  $(x, y)$  の全体からなる領域を  $xy$  平面上に図示し、その面積を求めよ。

(2) 任意の角  $\alpha, \beta$  に対して、  $-1 \leq x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \leq 1$  が成立するような点  $(x, y)$  の全体からなる領域を  $xy$  平面上に図示し、その面積を求めよ。

3  $p, q$  を実数とする。放物線  $y = x^2 - 2px + q$  が、中心  $(p, 2q)$  で半径 1 の円と中心  $(p, p)$  で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在する領域を  $xy$  平面上に図示せよ。

4 一辺の長さが 2 の正三角形  $ABC$  を平面上におく。  $\triangle ABC$  を 1 つの辺に関して  $180^\circ$  折り返すという操作を繰り返し行う。辺  $BC$  に関する折り返しを  $T_A$ 、辺  $CA$  に関する折り返しを  $T_B$ 、辺  $AB$  に関する折り返しを  $T_C$  とする。  $\triangle ABC$  は、最初 3 点  $A, B, C$  がそれぞれ平面上の 3 点  $O, B', C'$  の上に置かれているとする。

(1)  $T_A, T_C, T_B, T_C, T_A$  の順に折り返し操作を施したときの頂点  $A$  の移り先を  $P$  とする。また、  $T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B, T_A$  の順に折り返し操作を施したときの頂点  $A$  の移り先を  $Q$  とする。  $\theta = \angle POQ$  とするとき、  $\cos \theta$  の値を求めよ。

(2) 整数  $k, \ell$  に対して、  $\overrightarrow{OR} = 3k\overrightarrow{OB'} + 3\ell\overrightarrow{OC'}$  により定められる点  $R$  は、  $T_A, T_B, T_C$  の折り返し操作を組み合わせることにより、点  $A$  の移り先になることを示せ。

5

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$ と書かれたカードがそれぞれ1枚ずつある。この中から1枚のカードが選ばれたとき,  $xy$ 平面上の点  $P$  を次の規則にしたがって移動する。

- ・  $X$  のカードが選ばれたとき,  $P$  を  $x$  軸の正の方向に1だけ移動する。
- ・  $Y$  のカードが選ばれたとき,  $P$  を  $y$  軸の正の方向に1だけ移動する。
- ・  $Z$  のカードが選ばれたとき,  $P$  は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1)  $n$  を正の整数とする。最初, 点  $P$  を原点の位置におく。 $X$  のカードと  $Y$  のカードの2枚から無作為に1枚を選び,  $P$  を, 上の規則にしたがって移動するという試行を  $n$  回繰り返す。

(i)  $n$  回の試行の後に  $P$  が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)  $P$  が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2)  $n$  を正の3の倍数とする。最初, 点  $P$  を原点の位置におく。 $X$  のカード,  $Y$  のカード,  $Z$  のカードの3枚のカードから無作為に1枚を選び,  $P$  を, 上の規則にしたがって移動するという試行を  $n$  回繰り返す。

(i)  $n$  回の試行の後に  $P$  が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)  $P$  が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。