

p, q, r, a, b は実数であり、 $b \neq 0$ であるから、 $f(x) = 0$ が $x = a + bi$ を解に持つとき、 $x = a - bi$ も解の 1 つである。解と係数の関係から、

$$\begin{cases} (a+bi) + (a-bi) + c = -p \\ (a+bi)(a-bi) + c\{(a+bi) + (a-bi)\} = q \\ c(a+bi)(a-bi) = -r \end{cases}$$

が成り立ち、整理すると

$$\begin{cases} p = -(2a+c) & \dots \textcircled{1} \\ q = a^2 + b^2 + 2ca & \dots \textcircled{2} \\ r = -(a^2 + b^2)c & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

であるから、

$$\begin{aligned} s(c) - s(a) &= f'(c) - f'(a) \\ &= 3(c^2 - a^2) + 2p(c - a) \\ &= (c - a)\{3(c + a) + 2p\} \\ &= (c - a)\{3(c + a) - 2(2a + c)\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= (c - a)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a \neq c$ であるから、

$$\begin{aligned} s(c) - s(a) &= (c - a)^2 > 0 \\ \therefore s(c) &> s(a) \end{aligned}$$

となる。

(答) $s(c) > s(a)$

(2)

(i)

①, ②, ③より、 a, b, c が全て整数であるとき、 p, q, r も全て整数となる。

(証明終)

(ii)

①より、 $c = -(2a + p)$ であるから、 p が 2 の倍数のとき、 c も 2 の倍数となる。

このとき、②より、

$$a^2 + b^2 = q - 2ca$$

であることから、 q が 4 の倍数であることと合わせて、 $a^2 + b^2$ は 4 の倍数となる。

ここで、 a と b の偶奇で場合わけをする。以下、 k, l を整数とする。

[1] a と b がともに偶数のとき

$$a = 2k, \quad b = 2l$$

とおくと、

$$a^2 + b^2 = 4(k^2 + l^2)$$

であり、 $a^2 + b^2$ は 4 の倍数である。

[2] a と b のうち、片方が偶数で片方が奇数のとき

a, b のうち、一方を $2k$ 、他方を $2l-1$ とおくと、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k)^2 + (2l-1)^2 \\ &= 4(k^2 + l^2 - l) + 1 \end{aligned}$$

であり、 $a^2 + b^2$ は 4 の倍数とならない。

[3] a と b がともに奇数のとき

$$a = 2k-1, \quad b = 2l-1$$

とおくと、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k-1)^2 + (2l-1)^2 \\ &= 4(k^2 + l^2 - k - l) + 2 \end{aligned}$$

であり、 $a^2 + b^2$ は 4 の倍数とならない。

以上[1][2][3]より、 $a^2 + b^2$ が 4 の倍数となるのは、 a, b がともに偶数であるときのみである。

以上より、 a, b, c は全て 2 の倍数であることが示された。

(証明終)

(1)

$f(x) = x^3 - 3ax^2$ とおくと、 $f'(x) = 3x^2 - 6ax$ である。

2点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha \neq \beta$) とおくと、

A, B における接線の傾きが等しいことから、

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= f'(\beta) \\ \Leftrightarrow 3\alpha^2 - 6a\alpha &= 3\beta^2 - 6a\beta \\ \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2a) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $\alpha \neq \beta$ より、

$$\alpha + \beta = 2a$$

となる。C(x, y) とおくと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + \beta}{2} = a \\ y &= \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \\ &= \frac{\alpha^3 + \beta^3 - 3a(\alpha^2 + \beta^2)}{2} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}}{2} \\ &= \frac{(2a)^3 - 6a\alpha\beta - 3a\{(2a)^2 - 2\alpha\beta\}}{2} \\ &= -2a^3 \end{aligned}$$

より、C($a, -2a^3$) となる。 $f(a) = -2a^3$ であることから、C は曲線 $y = f(x)$ 上にある。

(証明終)

(2)

直線 AB が C($a, -2a^3$) を通ることから、

$$\begin{aligned} -2a^3 &= -a - 1 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(2a^2 + 2a + 1) &= 0 \end{aligned}$$

a は実数であるから、 $a = 1$ である。

このとき、曲線の方程式は、 $y = x^3 - 3x^2$ となり、 $y = -x - 1$ と連立して解くと、

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 &= -x - 1 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、A, B の x 座標は $x = 1 \pm \sqrt{2}$ である。よって、

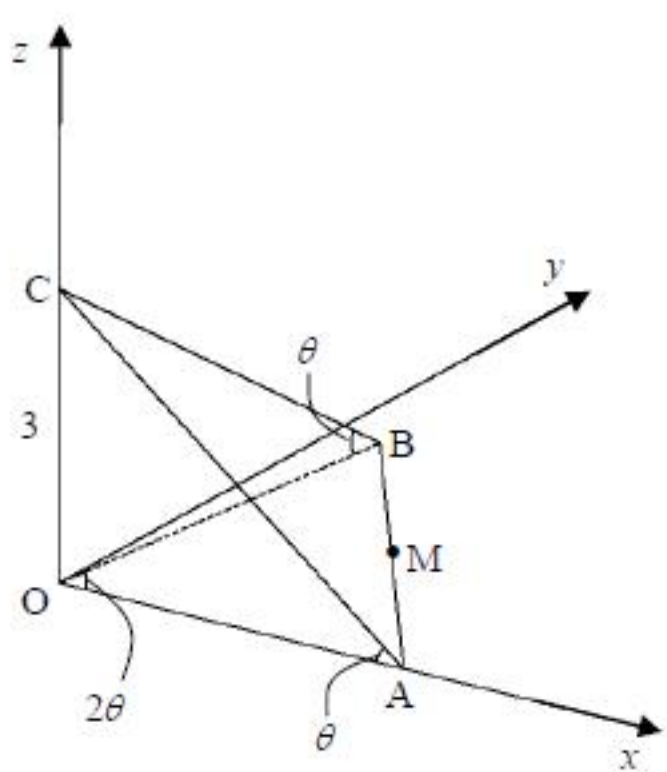
$$\begin{aligned} m &= f'(1 \pm \sqrt{2}) \\ &= 3\{(1 \pm \sqrt{2})^2 - 2(1 \pm \sqrt{2})\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $a = 1, m = 3$

3

(1)

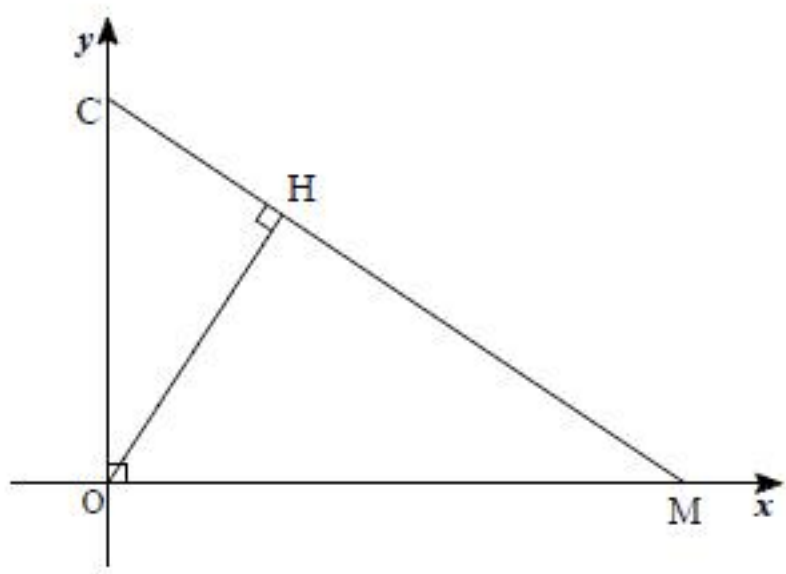


$\angle OAC = \angle OBC = \theta$ より、
 $\triangle OAC \equiv \triangle OBC$. . . ①
 $\therefore CA = CB$

となる。図のように、辺 AB の中点を M とすると、
 四面体 $OABC$ は面 OCM に関して対称である。したがって、
 O から面 ABC に下ろした垂線の足 H は、 CM 上にある。①より、 $OA = OB$ であるから、
 $OM \perp AB$

となり、 $\angle AOM = \angle BOM = \theta$ より、
 $OM = OA \cos \theta$
 $= \frac{OC}{\tan \theta} \cdot \cos \theta$
 $= \frac{3 \cos \theta}{\tan \theta}$

である。



よって、

$$\begin{aligned} \sin \angle OCM &= \frac{OM}{CM} \\ &= \frac{OM}{\sqrt{OC^2 + OM^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{OC}{OM}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tan \theta}{\cos \theta}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} OH &= OC \cdot \sin \angle OCH \\ &= \frac{3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

(2)

$$\begin{aligned} \angle MOH &= \angle OCH \text{ より、} \\ \sin \angle MOH &= \sin \angle OCM \\ &= \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。したがって、 H の z 座標は、

$$\begin{aligned} OH \cdot \sin \angle MOH &= \frac{3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \\ &= \frac{3}{t^4 + t^2 + 1} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3}{t^4 + t^2 + 1}$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1)

a_n の一の位を b_n とすると、数列 $\{b_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) は、

$$1, 2, 8, 0, 8, 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, \dots$$

となり、

$$b_{22} = b_2, \quad b_{23} = b_3$$

であることから、 $\{b_n\}$ は $b_1 = 1$ の後、

$$\{2, 8, 0, 8, 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6\} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が繰り返し現れる数列となる。

$$2010 = 1 + (20 \cdot 100 + 9)$$

であるから、 a_{2010} を 10 で割ったあまり、すなわち b_{2010} は②の 9 番目の項であり、4 となる。

(答) 4

(2)

$a_2 = 3a_1$ であることと、①より、

$$a_3 = 3a_1 + 6a_1 = 9a_1 = 3^2 a_1$$

$$a_4 = 9a_1 + 6 \cdot 3a_1 = 27a_1 = 3^3 a_1$$

であるから、

$$a_n = 3^{n-1} a_1 \quad \cdots (*)$$

と推定される。 $(*)$ が正しいことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

上の計算から、 $(*)$ は成立する。

[2] $n=k, k+1$ のとき $(*)$ が成立すると仮定すると、

$$a_k = 3^{k-1} a_1, \quad a_{k+1} = 3^k a_1$$

であり、①より、

$$a_{k+2} = 3^k a_1 + 6 \cdot 3^{k-1} a_1 = 3 \cdot 3^k a_1 = 3^{k+1} a_1$$

であり、 $n=k+2$ のときも $(*)$ は成立する。

以上より、 $(*)$ が任意の自然数 n に対して成立することが示された。

したがって、

$$\begin{aligned} a_{n+4} - a_n &= 3^{n+3} a_1 - 3^{n-1} a_1 \\ &= (3^4 - 1) \cdot 3^{n-1} a_1 \\ &= 80 \cdot 3^{n-1} a_1 \end{aligned}$$

となり、 $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることが示された。

(証明終)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ の順列は、全部で 6^n 通りあり、これらは同様に確からしい。

(1)

$A_2, A_3, \dots, A_n$ が一度も起こらないのは、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の隣り合う 2 項が全て異なるときであり、

$$6 \cdot 5^{n-1} \text{ 通り}$$

ある。よって、

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \frac{6 \cdot 5^{n-1}}{6^n} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2)

$A_2, A_3, \dots, A_n$ が一度だけ起こる場合は、 $A_2 \sim A_n$ のどれが起こるかで、

$$n-1 \text{ 通り}$$

あり、例えば、 A_2 だけが起こる場合、すなわち、

$$X_1 = X_2 \text{ かつ } X_i \neq X_{i-1} \quad (i = 3, 4, \dots, n)$$

となるのは、

$$6 \cdot 5^{n-2} \text{ 通り}$$

ある。他の場合も同様であるから、

$$(n-1) \cdot 6 \cdot 5^{n-2} \text{ 通り}$$

である。(1)の場合も考え、

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - \frac{6 \cdot 5^{n-1} + (n-1) \cdot 6 \cdot 5^{n-2}}{6^n} \\ &= 1 - \frac{(n+4) \cdot 5^{n-2}}{6^{n-1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad q_n = 1 - \frac{(n+4) \cdot 5^{n-2}}{6^{n-1}}$$