

数 問

数 学

22 年 度(前期)

注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は1冊（本文2ページ，白紙2枚），解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

(例) 受験番号 50001 番の場合 →

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所を書くが無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 実数 p, q, r に対して、3次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める。実数 a, c 、および0でない実数 b に対して、 $a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする。ただし、 i は虚数単位を表す。

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて、点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし、点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。 $a \neq c$ のとき、 $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) さらに、 a, c は整数であり、 b は0でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i) p, q, r はすべて整数である。

(ii) p が2の倍数であり、 q が4の倍数であるならば、 a, b, c はすべて2の倍数である。

2 a を実数とする。傾きが m である2つの直線が、曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点A、点Bで接している。

(1) 線分ABの中点をCとすると、Cは曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線ABの方程式が $y = -x - 1$ であるとき、 a, m の値を求めよ。

3 原点をOとするxyz空間内で、 x 軸上の点A、 xy 平面上の点B、 z 軸上の点Cを、次をみたすように定める。

$$\angle OAC = \angle OBC = \theta, \angle AOB = 2\theta, OC = 3$$

ただし、Aの x 座標、Bの y 座標、Cの z 座標はいずれも正であるとする。さらに、 $\triangle ABC$ 内の点のうち、Oからの距離が最小の点をHとする。また、 $t = \tan \theta$ とおく。

(1) 線分OHの長さを t の式で表せ。

(2) Hの z 座標を t の式で表せ。

- 4 0以上の整数 a_1, a_2 があたえられたとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める。

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき、 a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。
(2) $a_2 = 3a_1$ のとき、 $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

- 5 n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ、出た目の数をそれぞれ順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。 $i = 2, 3, \dots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

- (1) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。
(2) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。