

$$(1) \quad 1 < x < y, \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3} \quad \dots\dots ①$$

$$① \iff \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\iff 3(x+1)(y+1) = 5xy$$

$$\iff 2xy - 3x - 3y - 3 = 0$$

$$\iff (2x-3)(2y-3) = 15$$

$$-1 < 2x-3 < 2y-3 \text{ から} \quad (2x-3, 2y-3) = (1, 15), (3, 5)$$

$$\therefore (x, y) = (2, 9), (3, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad 1 < x < y < z, \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \quad \dots\dots ①$$

$$\iff \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} \cdot \frac{z+1}{z} = \frac{12}{5}$$

$$\iff 5(x+1)(y+1)(z+1) = 12xyz \quad \dots\dots ②$$

②の左辺は5で割り切れる. $z = 5k$ (k :自然数)のときをまず考える.

$$② \iff 5(x+1)(y+1)(5k+1) = 12xy \cdot (5k)$$

$$\iff (x+1)(y+1) = \frac{12xyk}{5k+1}$$

$1 < x < y < 5k$ より左辺が整数になるのは, $5k+1$ が12の約数になるときであるので, $6 \leq 5k+1 \leq 12$

これを満たす k は $k=1$ のときで, $5k+1=6$ のみで, このとき,

$$(x+1)(y+1) = 2xy$$

$$\iff xy - x - y - 1 = 0 \iff (x-1)(y-1) = 2$$

$$x-1 < y-1 \text{ より, } (x-1, y-1) = (1, 2) \text{ から } (x, y) = (2, 3)$$

$$\therefore (x, y, z) = (2, 3, 5)$$

x, y が $x=2, y=3$ より大きな自然数のとき, ①の左辺は

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) < \frac{12}{5} \text{ となるから, 不適.}$$

$$\therefore (x, y, z) = (2, 3, 5) \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (1) 点 B を x 軸上に, $B(r, 0)$ ととっても一般性を失わない.

$\angle COB = \alpha$ とおく.

線分 OA, OB に関して C の対称点をそれぞれ, C_0, C_1 とすると

$CP + PQ + QC$ が最小になるのは 3 点

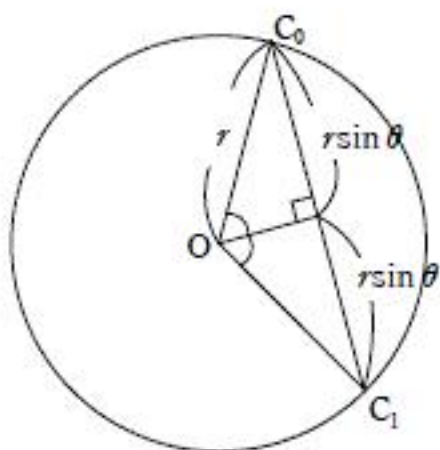
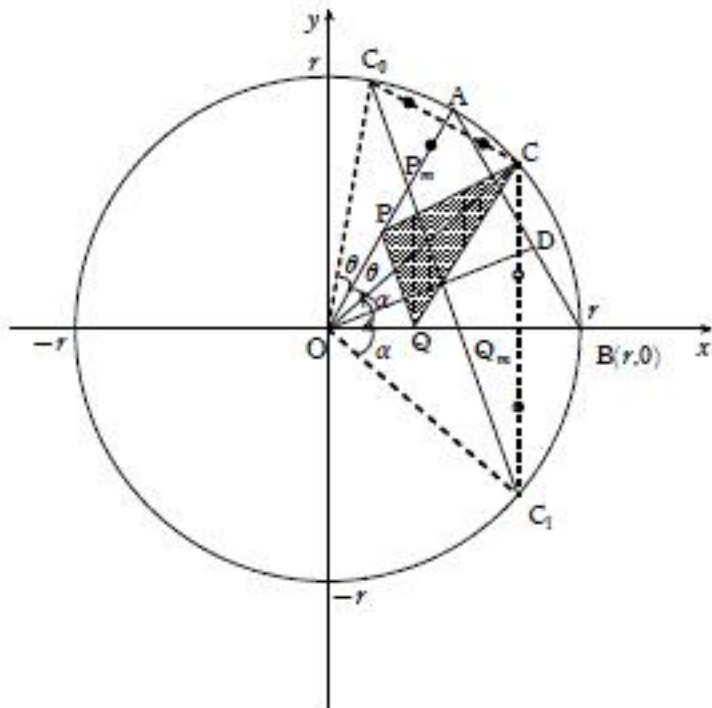
C_0, P, C_1 が同一直線上の点になるときで,

$$\angle C_0OC_1 = (\theta - \alpha) + (\theta - \alpha) + \alpha + \alpha = 2\theta$$

となるから,

$$CP + PQ + QC \geq C_0C_1 = 2r \sin \theta$$

最小値 $2r \sin \theta$ (答)



- (2) 線分 OA, OB に関して D の対称点をそれぞれ D_0, D_1 とする.

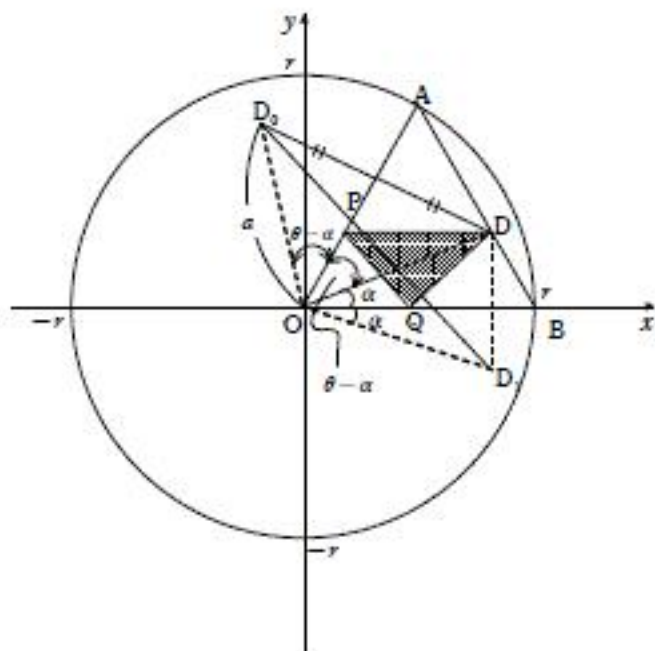
$\angle DOB = \alpha$ とおくと ($0 \leq \alpha \leq \theta$)

$$\angle D_0OD_1 = (\theta - \alpha) + (\theta - \alpha) + \alpha + \alpha = 2\theta$$

(1) と同様にして

$$DP + PQ + QR \geq D_0D_1 = 2a \sin \theta$$

最小値 $2a \sin \theta$ (答)



- (3) $\triangle OBD$ で正弦定理を用いると,

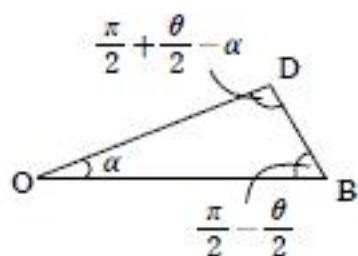
$$\frac{OB}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} - \alpha\right)} = \frac{OD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} \iff a = \frac{r \cos \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)}$$

$$D_0D_1 = 2a \sin \theta = \frac{2r \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)}$$

$0 \leq \alpha \leq \theta$ のとき, D_0D_1 が最小になるのは, $-\frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2} - \alpha \leq \frac{\theta}{2}$ より

$$\frac{\theta}{2} - \alpha = 0$$

$\alpha = \frac{\theta}{2}$ で, 最小値 $2r \sin \theta \cdot \cos \frac{\theta}{2}$ (答)



別解

D が線分 AB 上を動くとき, $a = OD$ が最小になるのは, D が線分 AB の中点に一致するときである.

このとき, $a = r \cos \frac{\theta}{2}$

よって, 最小値 $2r \sin \theta \cdot \cos \frac{\theta}{2}$ (答)

- (1) 直線 AP $y = -3px + 3p$ と C との
交点の x 座標は

$$-3x^2 + 3 = -3px + 3p$$

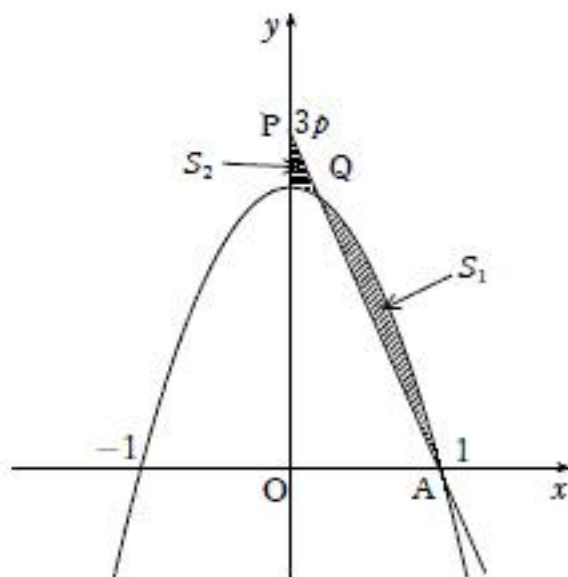
$$\Leftrightarrow 3(x^2 - px + p - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)\{x-(p-1)\} = 0$$

$$x=1 \text{ 以外の } x \text{ は } x=p-1$$

線分 AP 上に Q ($A \neq Q$) があるのは, $0 \leq p-1 < 1$

$$\therefore 1 \leq p < 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$



- (2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{p-1}^1 \{-3x^2 + 3 - (-3px + 3p)\} dx = -3 \int_{p-1}^1 (x - p + 1)(x - 1) dx \\ &= -3 \left[-\frac{1}{6}(2-p)^3 \right] = \frac{1}{2}(2-p)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{p-1} \{-3px + 3p + 3x^2 - 3\} dx = 3 \int_0^{p-1} \{(x-1)^2 + (2-p)(x-1)\} dx \\ &= 3 \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{2-p}{2}(x-1)^2 \right]_0^{p-1} \\ &= \left\{ \frac{1}{3}(p-2)^3 + \frac{2-p}{2}(p-2)^2 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{2-p}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(2-p)^3 - \frac{3}{2}(2-p) + 1 \end{aligned}$$

$S_1 + S_2$ を S とおくと,

$$S = S_1 + S_2 = (2-p)^3 - \frac{3}{2}(2-p) + 1$$

$$2-p=t \text{ とおくと, } 0 < t \leq 1 \text{ で, } S = t^3 - \frac{3}{2}t + 1$$

$$S' = 3t^2 - \frac{3}{2} \quad S' = 0 \text{ となる } t \text{ は } t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

この前後で S' は負から正に変わり, S は最小になる.

$$S \text{ を最小にする } p \text{ は } 2-p = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore p = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

- (1) C から AB に下ろした垂線の足を H とし,
 $h = CH$ とおく.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}, BC = \sqrt{b^2 + c^2}, CA = \sqrt{c^2 + a^2}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は,

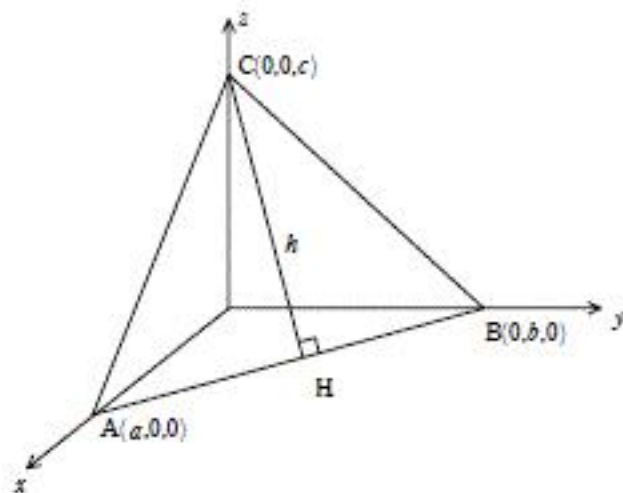
$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot h \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots\dots ①$$

一方,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + a^2) - a^4} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より

$$\begin{aligned} \frac{h \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2} &= \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{2} \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



- (2) $S_1 = \frac{1}{2}ab, S_2 = \frac{1}{2}bc, S_3 = \frac{1}{2}ca$ から, $ab = 2S_1, bc = 2S_2, ca = 2S_3$

を②に代入して

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

$$\sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

$$\begin{aligned} (\because) \quad 3S^2 - (S_1 + S_2 + S_3)^2 &= 3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - (S_1 + S_2 + S_3)^2 \\ &= 2S_1^2 + 2S_2^2 + 2S_3^2 - 2(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1) \\ &= (S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{3}S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

- (3) (2) の不等式で等号が成り立つのは

$$S_1 = S_2 = S_3 \iff ab = bc = ca \iff \begin{cases} c(a-b) = 0 \\ b(c-a) = 0 \end{cases}$$

$$b > 0, c > 0 \text{ より, } a = b = c \quad \dots\dots(\text{答})$$

n 回目に B が投げる確率を b_n とする.

$$a_1 = 1, b_1 = 0$$

1, 2, 3 の目のとき, 次の回には同じ人が投げる 確率 $\frac{1}{2}$

4, 5 の目のとき, 次の回には別の人が投げる 確率 $\frac{1}{3}$

6 の目のとき, 投げた人が勝ちで, それ以降は投げない 確率 $\frac{1}{6}$

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表すと,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} a_{n+1} \\ a_n \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}a_n \\ b_n \xrightarrow{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}b_n \end{array} & \begin{array}{c} b_{n+1} \\ a_n \xrightarrow{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}a_n \\ b_n \xrightarrow{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}b_n \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{6}(a_n + b_n)$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n - b_n)$$

これから,

$$a_n + b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} (a_1 + b_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$2 \text{ 式より } a_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\} \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) ちょうど n 回投げて A が勝つ確率 p_n は, n 回目に A がサイコロを投げて (a_n) ; 6 の目が出るときで,

$$p_n = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\} \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は,

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{12} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[6 - 6\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{6}{5} - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \right] \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{1}{10} \left[6 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right] \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$