

数 問

数 学

23 年 度(前期)

注 意

1. 「解答はじめ」というまで開いてはいけない。
2. 問題は 1 冊 (本文 2 ページ, 白紙 2 枚), 解答用紙は 3 枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入すること。

(例) 受験番号 50001 番の場合 →

5	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所を書くは無効になることがある。
5. 書き損じても, 代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後, 問題冊子と白紙は持ち帰ること。

- 1 (1) 自然数 x, y は, $1 < x < y$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{3}$$

をみたす. x, y の組をすべて求めよ.

- (2) 自然数 x, y, z は, $1 < x < y < z$ および

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$$

をみたす. x, y, z の組をすべて求めよ.

- 2 点 O を中心とする半径 r の円周上に, 2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり $\theta = \angle AOB$ とおく. この円周上に点 C を, 線分 OC が線分 AB と交わるようにとり, 線分 AB 上に点 D をとる. また, 点 P は線分 OA 上を, 点 Q は線分 OB 上を, それぞれ動くとする.

- (1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ.
 (2) $a = OD$ とおく. $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ.
 (3) さらに, 点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ.

- 3 xy 平面上に放物線 $C: y = -3x^2 + 3$ と 2 点 $A(1, 0), P(0, 3p)$ がある. 線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している.

- (1) 定数 p の存在する範囲を求めよ.
 (2) S_1 を, C と線分 AQ で囲まれた領域とし, S_2 を, C , 線分 QP , および y 軸とで囲まれた領域とする. S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ.

4 a, b, c を正の定数とする。空間内に3点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。

(1) 辺 AB を底辺とすると、 $\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ。

(2) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S, S_1, S_2, S_3 とする。ただし、 O は原点である。このとき、不等式

$$\sqrt{3} S \geq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

5 A と B の2人が、1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1 回めは A が投げる。

1, 2, 3 の目が出たら、次の回には同じ人が投げる。

4, 5 の目が出たら、次の回には別の人が投げる。

6 の目が出たら、投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない。

(1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。