

$$\boxed{1} \quad x < y < z$$

$$(1) \quad x + y - z = 2 \iff z = x + y - 2 \dots\dots ①$$

△ABCに余弦定理を用いて

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy \dots\dots ②$$

①を代入して、

$$x^2 + y^2 + xy = (x + y - 2)^2 = x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y$$

$$\iff xy - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\iff (x-4)(y-4) = 12$$

$1 \leq x < y$ より、 $-3 \leq x-4 < y-4$ であるから、かけて12になる組み合わせは

$$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{(x, y, z) = (5, 16, 19), (6, 10, 14), (7, 8, 13)} \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad x + y - z = 3 \iff z = x + y - 3 \dots\dots ③$$

(1)の②式に③を代入して、

$$x^2 + y^2 + xy = (x + y - 3)^2 = x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y$$

$$\iff xy - 6x - 6y + 9 = 0$$

$$\iff (x-6)(y-6) = 27$$

$-5 \leq x-6 < y-6$ より、

$$\begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{(x, y, z) = (7, 33, 37), (9, 15, 21)} \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad x + y - z = 2^a 3^b \iff z = x + y - 2^a 3^b \dots\dots ④$$

(1)の②式に④を代入して、

$$xy - 2^{a+1} \cdot 3^b x - 2^{a+1} \cdot 3^b y + 2^{2a} \cdot 3^{2b} = 0$$

$$\iff (x - 2^{a+1} 3^b)(y - 2^{a+1} 3^b) = 2^{2a} \cdot 3^{2b+1} \dots\dots ⑤$$

$2^{2a} \cdot 3^{2b+1} > 0$ より、

$$x - 2^{a+1} 3^b < 0 \text{ とすると、} y - 2^{a+1} 3^b < 0$$

$$x < y < x + y - 2^a 3^b \text{ より、} 2^a 3^b < x < y$$

したがって、

$$-2^a 3^b < x - 2 \cdot 2^a 3^b < y - 2 \cdot 2^a 3^b < 0$$

$$\iff (x - 2^{a+1} 3^b)(y - 2^{a+1} 3^b) < (2^a 3^b)^2 = 2^{2a} 3^{2b}$$

となり、⑤に反する。

したがって、

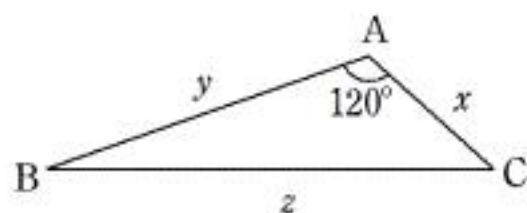
$$x - 2^{a+1} 3^b \neq 0 \text{ と合わせて、} 0 < x - 2^{a+1} 3^b < y - 2^{a+1} 3^b \dots ⑥$$

$2^{2a} \cdot 3^{2b+1}$ の正の約数は、 $(1+2+2^2+\dots+2^{2a})(1+3+3^2+\dots+3^{2b+1})$ を展開

したものに等しく、その個数は、 $(2a+1)(2b+2)$ 個となる。

求める x, y, z の組の個数は、⑤、⑥を満たす x, y の組の個数だから、

$$\frac{(2a+1)(2b+2)}{2} = \underline{(2a+1)(b+1)} \text{ (個)} \dots\dots(\text{答})$$



2 $y = f(x) = x^3 - 3a^2x = x(x - \sqrt{3}a)(x + \sqrt{3}a), |x| + |y| = 2 \cdots \textcircled{1}$

$$y' = f'(x) = 3(x^2 - a^2) = 3(x - a)(x + a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は } x = \pm a$$

[1] $a = 0$ のとき, $f'(x) \geq 0$ で, $y = f(x)$ は単調に増加する関数,

$y = f(x)$ と $\textcircled{1}$ との共有点の個数は 2 個

[2] $a \neq 0$ のとき, $y = f(x)$, $\textcircled{1}$ はともに原点对称なグラフより, 以下 $x \geq 0$

で調べる. $y = f(x)$ は $x = a$ で極小で, 極小値 $f(a) = -2a^3$

- $y = f(x)$ が直線 $y = x - 2$ に接するときの
 a は, 接点の x 座標を $x = t$ とおくと,

$$\begin{cases} t^3 - 3a^2t = t - 2 \\ 3t^2 - 3a^2 = 1 \iff 3a^2 = 3t^2 - 1 \end{cases}$$

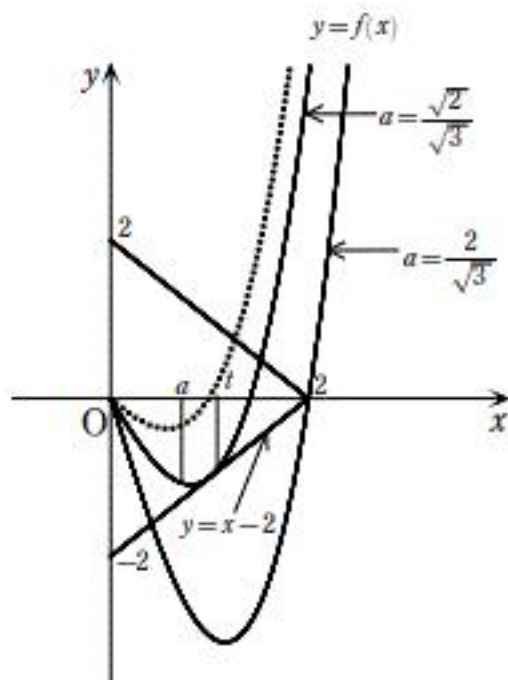
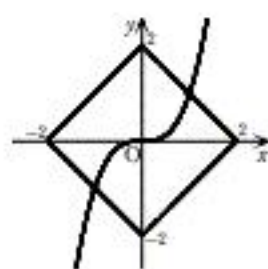
両式より, $t^3 = 1$ から $t = 1, a = \sqrt{\frac{2}{3}}$

- $y = f(x)$ が点 $(2, 0)$ を通るとき a は

$$\sqrt{3}a = 2, a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

対称性を考慮し, [1], [2] をあわせて,

$0 \leq a < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ のとき,	2 個	(答)
$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ のとき,	4 個	
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < a < \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき,	6 個	
$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき,	4 個	
$a > \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき,	2 個	



$$\boxed{3} \quad C: y = x^2 - x + k \iff x^2 - x - y + k = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (ax + by, cx + dy)$$

(1) (x', y') は C 上の点であるから代入して,

$$(ax + by)^2 - (ax + by) - (cx + dy) + k = 0$$

$$\iff a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy - (a + c)x - (b + d)y + k = 0$$

上式は (x, y) の関係式で, $\textcircled{1}$ 式に一致する. 各項の係数を比較して, ($k \neq 0$)

$$a^2 = 1, b^2 = 0, 2ab = 0, a + c = 1, b + d = 1$$

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1), (-1, 0, 2, 1)$$

$$(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1) \text{ より, } \underline{(a, b, c, d) = (-1, 0, 2, 1)} \dots\dots(\text{答})$$

(2) $A(t, t^2 - t + k)$ とおくと, (1) の結果から, $A'(-t, t^2 + t + k)$

A における接線は, $y = (2t - 1)(x - t) + t^2 - t + k = (2t - 1)x - t^2 + k$

これが原点を通ることから, $k = t^2 \therefore y = (2t - 1)x$

A' における接線は, $y = (-2t - 1)x - t^2 + k = -(2t + 1)x$

2 接線が直交することより,

$$(2t - 1) \cdot \{-(2t + 1)\} = -1 \iff 4t^2 - 1 = 1, t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \underline{k = \frac{1}{2}, A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \dots\dots(\text{答})$$

(1) $Q(x, y, 1)$ とおくと, $x^2 + y^2 = 1, z = 1 \dots \textcircled{1}$

$R(X, Y, 0)$ とおくと,

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PR} = (0, 0, 2) + t(X, Y, -2)$$

$$Q \text{ の } z \text{ 成分} = 1 = 2 - 2t \text{ より, } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } (x, y, 1) = \left(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y, 1 \right)$$

$$x = \frac{1}{2}X, y = \frac{1}{2}Y \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して, } X^2 + Y^2 = 4$$

よって, 点 R の軌跡は原点を中心とする半径 2 の円

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0 \dots\dots(\text{答})$$

(2) $P(x, y, 2)$ とおくと, $x^2 + y^2 = 1, z = 2 \dots \textcircled{2}$

正方形 $ABCD$ の辺 AB 上の点を, $Q(1, y', 1)$

$(-1 \leq y' \leq 1)$, xy 平面上の点 R を $R(X, Y, 0)$ とおくと,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + s\overrightarrow{RQ}$$

$$\iff (x, y, 2) = (X, Y, 0) + s(1 - X, y' - Y, 1)$$

z 成分を比較して, $s = 2, x = 2 - X, y = 2y' - Y$ を②式に代入して,

R の軌跡は, $(X - 2)^2 + (Y - 2y')^2 = 1$ となり, 中心に $(2, 2y')$, 半径 1 の円.

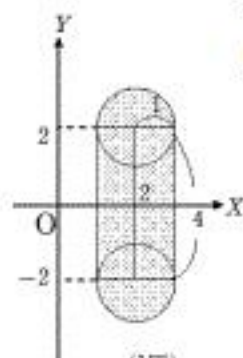
$-2 \leq 2y' \leq 2$ であるから, 下図の打点部分を動く. Q が AD, DC, CB を

(1図)

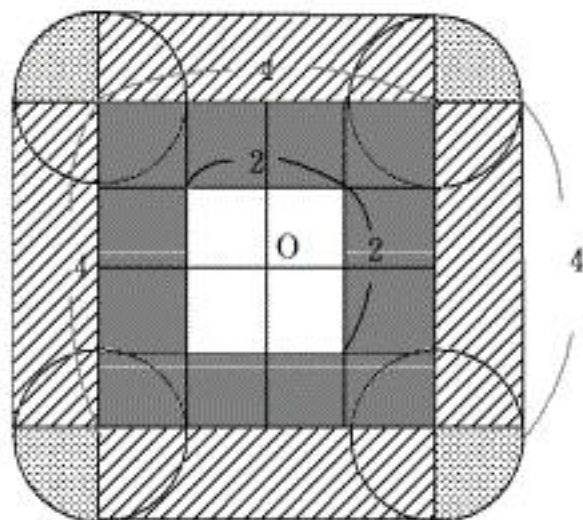
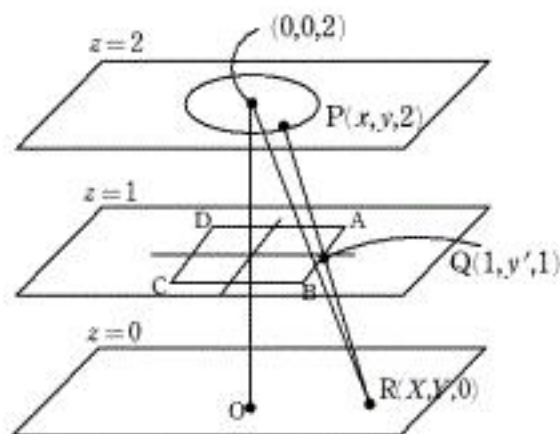
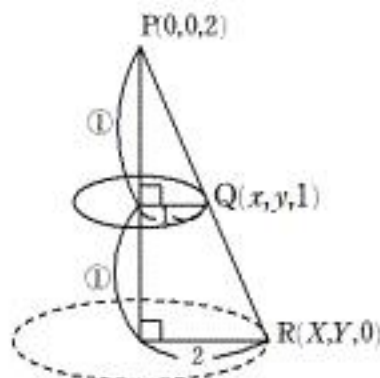
動くときにも同様に, R の軌跡は下図(2図)

求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \{1 \cdot 4\} + (4^2 - 2^2) + \pi \cdot 1^2 \\ &= \underline{\underline{\pi + 28}} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(1図)



(2図)

(1) 操作を n 回繰り返したとき、1 の目が上面、側面、下面にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおくと、 $a_n + b_n + c_n = 1$

$n=0$ も考慮して、 $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0; a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 0$ ①

$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ と a_n, b_n, c_n の関係式は、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = a_n + c_n + \frac{1}{2}b_n \stackrel{(\text{①より})}{=} 1 - b_n + \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2}b_n + 1 \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \end{cases}$$

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + 1 \text{ を変形して, } b_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{これより, } b_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(b_0 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$a_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \quad (n \geq 1) \text{ より, } \quad \underline{a_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \geq 1) \text{(答)}}$$

(2) 最後に 6 が上面にある確率は a_n に等しい.

2, 3, 4, 5 が上面にある確率は、それぞれ

$$\frac{1}{4}(1 - 2a_n) \quad (n \geq 1)$$

求める期待値は、

$$1 \cdot a_n + 6 \cdot a_n + (2+3+4+5) \cdot \frac{1}{4}(1 - 2a_n) = \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \quad \text{.....(答)}$$