

$$3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$$

$$\Leftrightarrow 3(p+q)(p^2 - pq + q^2) - pq(p+q) = 2013$$

$$\Leftrightarrow (p+q)(3p^2 - 4pq + 3q^2) = 3 \cdot 11 \cdot 61$$

$$3p^2 - 4pq + 3q^2 = 2(p-q)^2 + p^2 + q^2 > p+q \geq 2 \quad (p, q: \text{自然数})$$

$$(p+q, 3p^2 - 4pq + 3q^2) = (3, 11 \cdot 61), (11, 3 \cdot 61), (33, 61) \text{ の組み合わせである.}$$

(i) $p+q=3$ のとき

$$3p^2 - 4pq + 3q^2 = 3(p+q)^2 - 10pq = 27 - 10pq = 11 \cdot 61$$

$$-10pq = 644, pq = -64.4 \text{ となり, 不適.}$$

(ii) $p+q=11$ のとき

$$3p^2 - 4pq + 3q^2 = 3 \cdot 11^2 - 10pq = 183$$

$$-10pq = 183 - 363 = -180 \text{ から } pq = 18$$

$$p+q=11, pq=18 \text{ より, } p, q \text{ は } x^2 - 11x + 18 = (x-2)(x-9) = 0 \text{ の2解.}$$

$$\therefore (p, q) = (2, 9); (9, 2)$$

(iii) $p+q=33$ のとき

$$3p^2 - 4pq + 3q^2 = 3 \cdot 33^2 - 10pq = 61$$

$$-10pq = 61 - 3267 = -3206, pq = 320.6 \text{ となり不適.}$$

以上より, $(p, q) = (2, 9); (9, 2) \dots$ (答)

$$\boxed{2} \quad OA=4, OB=3, OC=2, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3 \text{ のなす角を } \beta \text{ とすると, } \cos \beta = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{OB \cdot OC} = \frac{1}{2} \text{ から, } \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, 0), \overrightarrow{OC} = (1, \sqrt{3}) \text{ ととっても一般性は失わない.}$$

A は $OA=4$ より, 原点を中心とする半径4の円上の点で,

$$\overrightarrow{OA} = (4 \cos \theta, 4 \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ととれる.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 4 \cos \theta, -4 \sin \theta)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 4 \cos \theta, \sqrt{3} - 4 \sin \theta) \text{ となるから, } \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| (3 - 4 \cos \theta)(\sqrt{3} - 4 \sin \theta) + 4 \sin \theta(1 - 4 \cos \theta) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| 3\sqrt{3} - 12 \sin \theta - 4\sqrt{3} \cos \theta + \cancel{16 \sin \theta \cos \theta} + 4 \sin \theta - \cancel{16 \sin \theta \cos \theta} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| 3\sqrt{3} - 4(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| 3\sqrt{3} - 4\sqrt{7} \sin(\theta + \alpha) \right| \\ &\quad \left(\alpha \text{ は } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ をみたす角} \right) \end{aligned}$$

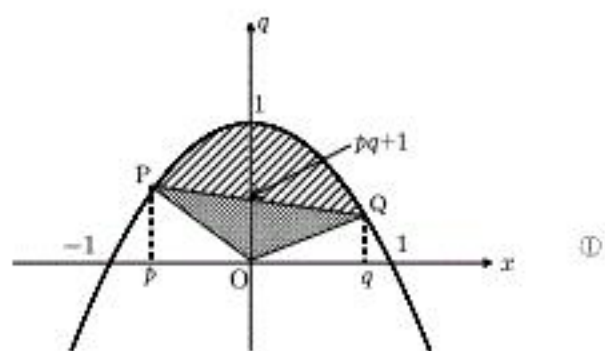
S が最大になるのは, $\sin(\theta + \alpha) = -1$ となるときで,

$$\text{最大値} \quad \frac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{7}}{2} \quad \dots \text{ (答)}$$

3 $C: y=1-x^2, P(p, 1-p^2), Q(q, 1-q^2)$

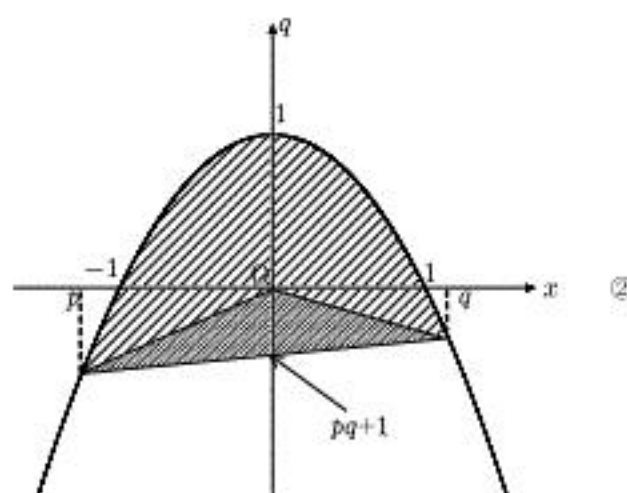
(1) 直線 PQ $y=-(p+q)x+pq+1$

$$\begin{aligned}\Delta OPQ &= \frac{1}{2} |p(1-q^2) - q(1-p^2)| \\ &= \frac{1}{2} |(p-q) - pq(q-p)| = \frac{1}{2} (q-p) |pq+1|\end{aligned}$$



直線 PQ と C とで囲まれる部分の面積は,

$$\begin{aligned}\int_p^q \{1-x^2 + (q+p)x - pq - 1\} dx \\ = -\int_p^q (x-p)(x-q) dx \\ = \frac{1}{6} (q-p)^3\end{aligned}$$



(i) $pq+1 \geq 0$ ①から,

$$S = \frac{1}{6} (q-p)^3 + \frac{1}{2} (q-p) |pq+1| = \frac{1}{6} (q-p)^3 + \frac{1}{2} (q-p) (pq+1)$$

(ii) $pq+1 < 0$ ②から,

$$S = \frac{1}{6} (q-p)^3 - \frac{1}{2} (q-p) |pq+1| = \frac{1}{6} (q-p)^3 + \frac{1}{2} (q-p) (pq+1)$$

$$\therefore S = \frac{1}{6} (q-p)^3 + \frac{1}{2} (q-p) (pq+1) \quad \dots (\text{答})$$

(2) $q=p+1$ のとき

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (p^2 + p + 1) = \frac{1}{2} \left(p^2 + p + \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(p + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{13}{12} \right] = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{13}{24}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{で } S \text{ は最小で, 最小値 } S = \frac{13}{24} \quad \dots (\text{答})$$

(3) $pq=-1$ のとき p, q は異符号で, $p < q$ から $p < 0, 0 < q, p = -\frac{1}{q}$ を代入して,

$$S = \frac{1}{6} \left(q + \frac{1}{q} \right)^3$$

$q > 0$ より, 相加・相乗平均を用いて,

$$S \geq \frac{1}{6} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{q \cdot \frac{1}{q}} \right]^3 = \frac{4}{3}$$

等号は $q = \frac{1}{q}$ のときで, $q=1, p=-1$ のとき成り立つ.

$$\text{最小値 } S = \frac{4}{3} \quad \dots (\text{答})$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 \quad \dots\dots ①$$

$$\overrightarrow{OA} = (2t, 2t, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 0, t) \quad (t > 0)$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ で,

$$① \iff \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) = 3$$

$$\iff 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} = 3, \quad |\overrightarrow{OP}|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} = 1$$

$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ とおくと, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (2t, 2t, t)$ であるから,

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}tx - \frac{4}{3}ty - \frac{2}{3}tz = 1$$

$$\iff \left(x - \frac{2}{3}t\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}t\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}t\right)^2 = t^2 + 1 \quad \dots\dots ②$$

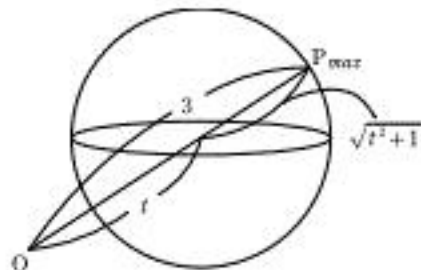
P は中心 $\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t\right)$, 半径 $\sqrt{t^2 + 1}$ の球面上の点であり, P と原点の距離 OP が

最大になるのは, 線分 OP が球の中心を通るときで,

$$t + \sqrt{t^2 + 1} = 3 \iff \sqrt{t^2 + 1} = 3 - t$$

$0 < t < 3$ で辺々を 2 乗して,

$$t^2 + 1 = 9 - 6t + t^2, \quad t = \frac{4}{3} \quad \dots \text{ (答)}$$



$$\boxed{5} \quad s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} \cdot a_k = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$$

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を p_n とする.

$n=1$ のとき, $s_1 = a_1$ が 4 で割り切れるのは, $a_1 = 4$ のみで, $p_1 = \frac{1}{6}$

$n=2$ のとき, $s_2 = a_1 \cdot 10 + a_2$ が 4 で割り切れるのは,

$$s_2 = 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 \text{ の } 9 \text{ 通り.} \quad p_2 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$n \geq 3$ のとき,

$$s_n = \underbrace{100 \cdot \{a_1 \cdot 10^{n-3} + a_2 \cdot 10^{n-4} + \dots + a_{n-2}\}}_{4 \text{ で割り切れる}} + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$$

s_n が 4 で割り切れるのは, $a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ の 2 桁の数が 4 で割り切れるときで,

$$p_2 \text{ と同様で, } p_n = \frac{1}{4} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore p_n = \begin{cases} \frac{1}{6} & (n=1) \\ \frac{1}{4} & (n \geq 2) \end{cases} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を q_n とする.

$n=1$ のとき, $s_1 = a_1 (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を 6 で割った余りは, $1, 2, 3, 4, 5, 0$ で,

$$\text{それぞれ確率は等しく, } q_1 = \frac{1}{6}$$

$n=2$ のとき, $s_2 = 10 \cdot a_1 + a_2$

$10a_1$ は $10, 20, 30, 40, 50, 60$ で各々の確率は $\frac{1}{6}$, 例えば $10a_1$ が 10 のとき,

6 で割った余りは 4 で, $a_2 = 2$ のとき $\left(\text{確率 } \frac{1}{6} \right)$, s_2 は 6 で割り切れる.

$10a_1 = 20, 30, 40, 50, 60$ のときも同様であるから,

$$\therefore q_2 = 6 \times \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{すべての自然数 } n \text{ で, } q_n = \frac{1}{6}$$

以下, s_n (n : 自然数) を 6 で割った余りは等確率で, $q_n = \frac{1}{6}$ となることを示す.

($\therefore$) $n=1$ のとき, 成り立つ.

$n=m$ のとき, 成り立つと仮定する. s_m を 6 で割った余りは等確率で

$$q_m = \frac{1}{6}$$

$n=m+1$ のとき,

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= 10s_m + a_{m+1} \\ &= 10(6A + r) + a_{m+1} = 6(10A) + \underline{10r + a_{m+1}} \quad (A: \text{自然数}) \end{aligned}$$

$r=0, 1, 2, 3, 4, 5$ でこれは等確率 $\frac{1}{6}$ で生じる.

$a_{m+1}=1, 2, 3, 4, 5, 6$ であるから, $10r + a_{m+1}$ を 6 で割った余りが

0 になる確率は, $6 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$ となり, 成り立つ.

$$\therefore q_n = \frac{1}{6} \quad \dots \text{ (答)}$$

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を r_n とする.

$n=1$ のとき, $s_1 = a_1$ を 7 で割った余りは, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ であるから, $r_1 = 0$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_n \cdot 10 + a_{n+1} \\ &= 10 \cdot (a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n) + a_{n+1} \\ &= 10 \cdot s_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

s_n を 7 で割った商を A , 余りを B とすると, ($B=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$s_n = 7A + B \text{ と表せる.}$$

$$s_{n+1} = 10(7A + B) + a_{n+1} = 70A + \underline{10B + a_{n+1}}$$

$B=0$ となる確率が r_n , $B=0$ のとき, a_{n+1} は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のどれかであるから,

何を足しても $10B + a_{n+1}$ は

7 で割り切れない.

$B \neq 0$ のとき, $10B$ を 7 で割った余りは, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のどれかで, これらは等確率である.

$10B + a_{n+1}$ は $a_{n+1}=1, 2, 3, 4, 5, 6$ のどれか 7 で割った余りが 0 になる.

$$\therefore r_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - r_n)$$

$$\iff r_{n+1} = -\frac{1}{6}r_n + \frac{1}{6}$$

$$\text{変形して, } r_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(r_n - \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{から, } r_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(r_1 - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore r_n = \frac{1}{7}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\} \quad \dots \text{ (答)}$$