第 1 問

$$\begin{cases} a-b-8=p \\ b-c-8=q \end{cases} \quad p,q \text{ 素数} \quad \begin{cases} a=b+8+p \\ b=c+8+q \end{cases} \text{ から } c<b<a$$

（i）$c=2$ のとき，$b=q+10$ から $b \neq 2$，a は $a=\underbrace{b+8}_{\text{奇}}+p \geqq 13$ を満たす素数

$(b+8)$ は奇数であるから，$p=2$，$\begin{cases} a=b+10=q+20 \\ b=q+10 \end{cases}$

a, b：素数より，

（イ）$q=3$ のとき，$(a,b,c)=(23,13,2)$ のとき成り立つ.

（ロ）q が 5 以上の素数とき，　$q=3k+l$　（k ：自然数，l ：1 or 2）とおくと，

・$q=3k+1$　のとき，　$a=3\cdot(k+7)$，　a ：素数より不適.

・$q=3k+2$　のとき，　$b=3\cdot(k+4)$，　b ：素数より不適.

（ii）$c \geqq 3$ のとき，

$b=\underbrace{c+8}_{(\text{奇})}+q$，$b$ ：素数より，$q=2$，　$\therefore b=c+10$

$a=\underbrace{b+8}_{(\text{奇})}+p$，$a$ ：素数より，$p=2$，$\therefore a=b+10$

よって，$a=c+20, b=c+10, c$

（イ）$c=3$ のとき，$(a,b,c)=(23,13,3)$ のとき成り立つ.

（ロ）c が 5 以上の素数のとき，（i）の（ロ）と同様に満たさず不適.

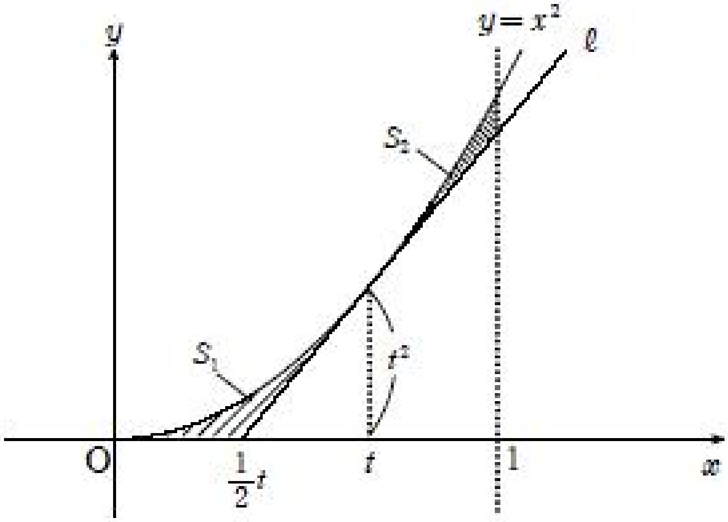
以上（i），（ii）から　$\underline{(a,b,c)=(23,13,2),(23,13,3)}$　…（答）

第 2 問

C 上の点 (t, t^2) における接線 ℓ は

$$\ell : y = 2tx - t^2 \quad (0 < t < 1)$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は，$x = \dfrac{1}{2}t$



$$S_1 = \int_0^t x^2 dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right) \cdot t^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t - \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^3 = \frac{1}{12}t^3$$

$$S_2 = \int_t^1 \left\{x^2 - \left(2tx - t^2\right)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2 x\right]_t^1$$

$$= \frac{1}{3} - t + t^2 - \left(\frac{1}{3}t^3 - \cancel{t^3} + \cancel{t^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3}$$

$f(t) = S_1 + S_2 = -\dfrac{1}{4}t^3 + t^2 - t + \dfrac{1}{3}$ とおくと，

$$f'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 2t - 1 = -\frac{1}{4}\left(3t^2 - 8t + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{4}(3t - 2)(t - 2)$$

$f'(t) = 0$ となる t は $0 < t < 1$ の範囲で，$t = \dfrac{2}{3}$

増減表をかくと

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

以上より， $S_1 + S_2$ は $t = \dfrac{2}{3}$ で最小値

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{27}} \qquad \cdots(答)$$

をとる．

第4問

(1) 線分ABの中点をHとし，

OA$=R$, AB$=2r$, OH$=h$とおくと，

$$R=\sqrt{h^2+r^2}$$

三角形の相似から

$$h-1:1=R:r \iff R=r(h-1)$$
$$\iff \sqrt{h^2+r^2}=r(h-1)$$

辺々を2乗して，

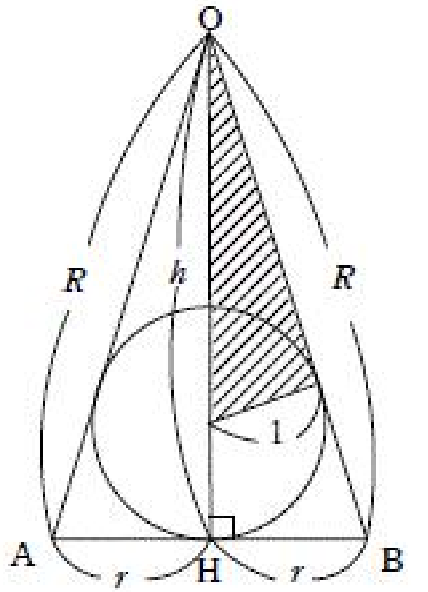
$$h^2+r^2=r^2(h^2-2h+1),$$
$$(r^2-1)h^2-2r^2h=0$$

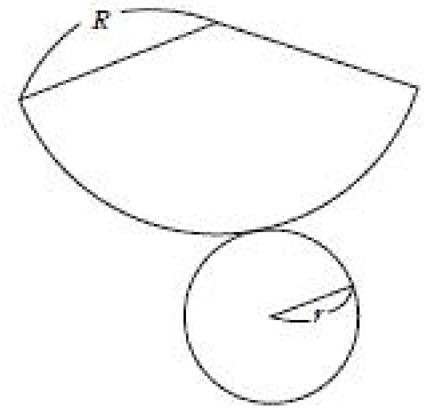
$(r^2-1)h\cdot\left\{h-\dfrac{2r^2}{r^2-1}\right\}=0$ から，$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$ $\quad(r>1)$

$$R=r(h-1)=r\left(\frac{2r^2}{r^2-1}-1\right)=r\cdot\frac{r^2+1}{r^2-1}=\frac{r^3+r}{r^2-1}$$

$$S=\pi r^2+\pi R^2\cdot\frac{r}{R}=\pi(r^2+rR)$$

$$=\underline{\pi\left(r^2+\frac{r^4+r^2}{r^2-1}\right)=\frac{2\pi r^4}{r^2-1}\quad(r>1)}$$ …(答)





(2) $S=2\pi\left(r^2+1+\dfrac{1}{r^2-1}\right)=2\pi\left(r^2-1+\dfrac{1}{r^2-1}+2\right)$，相加・相乗平均の関係より，

$$S\geqq 2\pi\left\{2\sqrt{\cancel{(r^2-1)}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2-1}}}+2\right\}=8\pi$$

等号は$r^2-1=\dfrac{1}{r^2-1} \iff r^2-1=1, r=\sqrt{2}$ のとき成り立つ.

以上より，最小値 $\underline{8\pi}$ …(答)

第 5 問

(1) 3 回コインを投げたとき，表，裏の出方は次の 8 通りである．

	Pの座標		Pの座標
（表，表，表）…	3	（表，裏，裏）…	1
（表，表，裏）…	-2	（裏，表，裏）…	-1
（表，裏，表）…	$\underline{0}$	（裏，裏，表）…	1
（裏，表，表）…	2	（裏，裏，裏）…	$\underline{0}$

$a_3=0$ となるのは，（表，裏，表），（裏，裏，裏）のときで，

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\underline{\frac{1}{4}} \qquad \cdots(答)$$

(2) $a_4=1$ となるのは，

（ⅰ）3 回まで $a_3=0$ かつ 0 にいて，4 回目に表がでるときで，

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

（ⅱ）3 回まで $a_3=-1$ かつ -1 にいて，4 回目に裏がでるときで，

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

以上より求める確率は，

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\underline{\frac{3}{16}} \qquad \cdots(答)$$

(3) $n \geqq 3$，操作を 3 回実行して P が各座標にある確率は(1)より，

$$a_3=0 \ \cdots\ \frac{1}{4} \qquad a_3=1 \ \cdots\ \frac{1}{4} \qquad a_3=2 \ \cdots\ \frac{1}{8}$$

$$a_3=3 \ \cdots\ \frac{1}{8} \qquad a_3=-1 \ \cdots\ \frac{1}{8} \qquad a_3=-2 \ \cdots\ \frac{1}{8}$$

となる．

（ⅰ）$a_3=0$ のとき，$a_n=n-3$ となるのは，残り $n-3$ 回表が出るときで，

この確率は

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

（ⅱ）$a_3=1, 3, -2$ のとき，$a_n=n-3$ とならず，不適．

（ⅲ）$a_3=2$ のとき，$a_n=n-3$ となるのは，表が k 回，裏が 2 回，表が $n-(k+5)$ 回でれば，

$$a_n=2+k+\{n-(k+5)\}=n-3 \qquad (k=0, 1, 2, \cdots(n-5))$$

となり，

この確率は，

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$k=0, 1, 2, \cdots(n-5)$ のときも同様であるから，

$$(n-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

（ⅳ）$a_3=-1$ のとき，4 回目に裏がでれば，$a_4=1$，

残り $n-4$ 回表がでれば，$a_n=1+n-4=n-3$

この確率は，

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

以上より，求める確率は，

$$\{2+(n-4)+1\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\underline{(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \quad (n\geqq 3) \qquad \cdots(答)$$