

①

$$a \geq 1, b \geq 1, a+b=9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

のとき、 $b=9-a \geq 1$ から $a \leq 8$ から、

$$1 \leq a \leq 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。

$$(1) \log_3 a + \log_3 b$$

$$= \log_3 (ab)$$

$$= \log_3 \{a(9-a)\}$$

$$= \log_3 \left\{ -\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4} \right\}$$

ここで $f(a) = -\left(a - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}$ とおくと、 $\frac{9}{2} = \frac{1+8}{2}$ であり、②の範囲で、

$$8 = f(1) = f(8) \leq f(a) \leq f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

だから、求める最大値は、

$$\log_3 \frac{81}{4} = \log_3 81 - \log_3 4 = 4 - 2\log_3 2 \quad \cdots \text{答}$$

最小値は、

$$\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3\log_3 2 \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \log_2 a + \log_4 b$$

$$= \log_2 a + \frac{\log_2 b}{\log_2 4}$$

$$= \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b$$

$$= \frac{1}{2} (2\log_2 a + \log_2 b)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 (a^2 b)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \{a^2 (9-a)\}$$

ここで $g(a) = a^2 (9-a)$ とおくと、

$$g'(a) = 18a - 3a^2 = -3a(a-6)$$

よって、②の範囲における関数 $g(a)$ の増減は

右のようになるから、

最小値は、

$$\frac{1}{2} \log_2 g(1) = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{3}{2} \quad \cdots \text{答}$$

最大値は、

$$\frac{1}{2} \log_2 g(6) = \frac{1}{2} \log_2 108$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 (2^2 3^3)$$

$$= \frac{1}{2} (2 + 3\log_2 3)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \log_2 3 \quad \cdots \text{答}$$

a	1	...	6	...	8
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$	8	↗	108	↘	64

[2]

$$x^2 = yz + 7 \quad \cdots \textcircled{1} \quad y^2 = zx + 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$z^2 = xy + 7 \quad \cdots \textcircled{3} \quad x \leq y \leq z \quad \cdots \textcircled{4}$$

について、①-②より、

$$x^2 - y^2 = z(y - x)$$

$$(x - y)(x + y + z) = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

同様に②-③、③-①より

$$(y - z)(x + y + z) = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$(z - x)(x + y + z) = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

が成立する。

(i) $x + y + z = 0$ のとき、⑤、⑥、⑦はすべて成立する。このとき④から、

$$x + x + x \leq x + y + z \leq z + z + z$$

から、 $x \leq 0 \leq z$ である。よって $zx \leq 0$ である。そこで②について、

$$y^2 = zx + 7 \leq 0 + 7 = 7$$

より $y^2 = 0, 1, 4$ のみ考えられる。

(ア) $y = 0$ のとき、

①、③から

$$x^2 = 7, z^2 = 7$$

x, z は整数だから、与えられた連立方程式を満たす整数の組 (x, y, z) はない。

(イ) $y = \pm 1$ のとき、 $x + z = \mp 1$ (複号同順) である。

このとき②から $zx = -6$ なので、 $x \leq 0 \leq z$ とで、 $(x, z) = (-3, 2), (-2, 3)$

従って、

$$(x, y, z) = (-3, 1, 2), (-2, -1, 3)$$

これらは①、②、③、④をすべてみたす。

(ウ) $y = \pm 2$ のとき、 $x + z = \mp 2$ (複号同順) である。

このとき②から $zx = -3$ なので、 $x \leq 0 \leq z$ とで、 $(x, z) = (-3, 1), (-1, 3)$

このとき、いずれにせよ条件④をみたさない。

(ii) $x + y + z \neq 0$ のとき、⑤、⑥、⑦から、

$$x - y = y - z = z - x = 0$$

つまり、 $x = y = z$ である。このとき、①より、

$$x^2 = x^2 + 7$$

となり、不適。

以上(i)(ii)より、

$$(x, y, z) = (-3, 1, 2), (-2, -1, 3) \quad \cdots \text{答}$$

※①、②、③の和をとり、 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 42$ から考えることもできる。

$$P(0)=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$P(x+1)-P(x)=2x \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、②で $x=n$ (n は整数) とすると、

$$P(n+1)-P(n)=2n$$

が任意の整数 n で成立する。このとき、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{P(k+1)-P(k)\} = \sum_{k=0}^{n-1} 2k$$

から、

$$P(n)-P(0)=2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$$

が成立し、①とで、

$$P(n)=n^2-n+1$$

ここで整式 $Q(x)=x^2-x+1-P(x)$ を考える。これは、任意の整数 k に対して、

$$\begin{aligned} Q(k) &= k^2 - k + 1 - P(k) \\ &= k^2 - k + 1 - (k^2 - k + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。つまり無数の異なる整数値に対して $Q(x)=0$ となるが、 $Q(x)$ が x の整式であることから $Q(x)$ は恒等的に 0 であるしかない。

$Q(x)=0$ だから、

$$0=x^2-x+1-P(x)$$

より、

$$P(x)=x^2-x+1 \quad \cdots \text{答}$$

4

$$a+b+c=1 \quad \cdots ①$$

$$|ax+by| \leq 1 \quad \cdots ②$$

$$|cx-by| \leq 1 \quad \cdots ③$$

について、②より

$$-1 \leq ax+by \leq 1 \quad \cdots ④$$

③より、

$$-1 \leq cx-by \leq 1 \quad \cdots ⑤$$

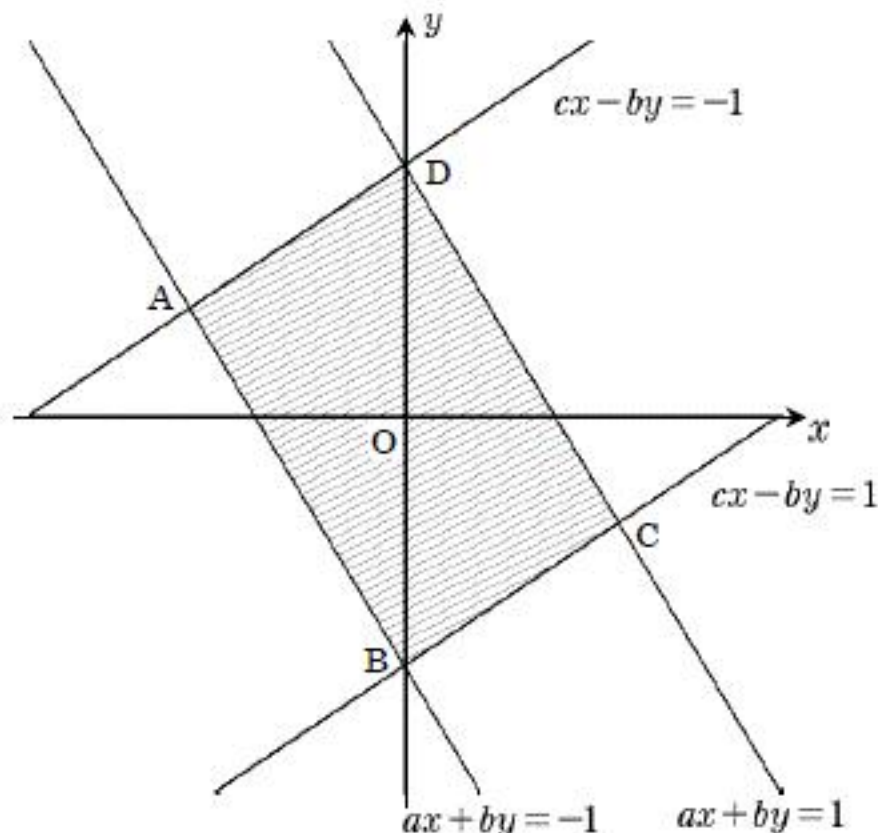
④かつ⑤をみたす点 (x,y) の存在領域を図示すると、右図のようになる。

(図の斜線部分、境界を含む)

図のように4点A, B, C, Dを考えると、

$$A\left(-\frac{2}{a+c}, \frac{a-c}{b(a+c)}\right), \quad B\left(0, -\frac{1}{b}\right)$$

$$C\left(\frac{2}{a+c}, \frac{c-a}{b(a+c)}\right), \quad D\left(0, \frac{1}{b}\right)$$



である。四角形ABCDは平行四辺形である。従って、領域Dの面積を S とすると、

$$S = (\text{三角形BCDの面積}) \times 2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot (\text{点Cの}x\text{座標}) \times 2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{2}{a+c} \cdot 2$$

$$= \frac{4}{b(a+c)}$$

ここで①より $a+c=1-b>0$ だから、 $0<b<1$ であり、

$$S = \frac{4}{b(1-b)}$$

$$= \frac{4}{-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$

である。等号は $b=\frac{1}{2}, a+c=\frac{1}{2}$ のときに成立する。

以上より、Dの面積の最小値は16 …答

⑤

(1) 3つの直線 k, l, m の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}$ とすると、

$$\vec{k}=(1,1,0), \vec{l}=(0,1,1), \vec{m}=(1,0,1)$$

と表せる。ここで、 l 上の点 P_2 は $P_2(0, s, s-1)$ と表せるので、 $P_1(1,0,0)$ のとき、

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(-1, s, s-1)$$

よって、 $\overrightarrow{P_1P_2} \perp l$ となる条件は、

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{l} = 0$$

より、

$$(-1) \cdot 0 + s \cdot 1 + (s-1) \cdot 1 = 0$$

$$s = \frac{1}{2}$$

従って、 $P_2\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ …答

同様に考えると、 m 上の点 P_3 は $P_3(t-1, 0, t)$ と表せるので、

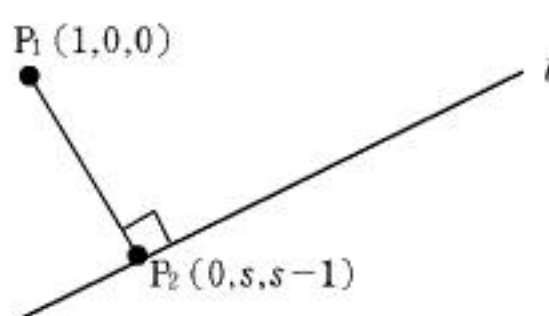
$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(t-1, -\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}\right)$$

よって $\overrightarrow{P_2P_3} \perp m$ となる条件は、 $\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \vec{m} = 0$ より、

$$(t-1) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(t+\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{4}$$

従って、 $P_3\left(-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$ …答



(2) (1)の計算を一般化する。

まずは1以上の自然数 q に対して、3直線 k, l, m 上の点

$$P_{3q-2}(a_q, a_q-1, 0), P_{3q-1}(0, b_q, b_q-1), P_{3q}(c_q-1, 0, c_q)$$

を考える。すると、条件から、

$$\overrightarrow{P_{3q-2}P_{3q-1}} \cdot \vec{l} = 0, \overrightarrow{P_{3q-1}P_{3q}} \cdot \vec{m} = 0, \overrightarrow{P_{3q}P_{3q+1}} \cdot \vec{k} = 0$$

が成立するので、

$$(-a_q) \cdot 0 + (b_q - a_q + 1) \cdot 1 + (b_q - 1) \cdot 1 = 0$$

$$(c_q - 1) \cdot 1 + (-b_q) \cdot 0 + (c_q - b_q + 1) \cdot 1 = 0$$

$$(a_{q+1} - c_q + 1) \cdot 1 + (a_{q+1} - 1) \cdot 1 + (-c_q) \cdot 0 = 0$$

より、

$$2b_q = a_q, 2c_q = b_q, 2a_{q+1} = c_q \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。 $a_1 = 1$ であり、①より、

$$\begin{aligned} a_{q+1} &= \frac{1}{2}c_q \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b_q \\ &= \frac{1}{4}b_q \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}a_q \\ &= \frac{1}{8}a_q \end{aligned}$$

よって、数列 $\{a_q\}$ は公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列であるので、 $a_q = 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1}$ だから、

$$b_q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1}, c_q = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} P_{3q-2}P_{3q-1}^2 &= (-a_q)^2 + (b_q - a_q + 1)^2 + (b_q - 1)^2 \\ &= (a_q)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}a_q\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a_q - 1\right)^2 \quad (\textcircled{1}より) \\ &= \frac{3}{2}a_q^2 - 2a_q + 2 \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^{2q-2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1} + 2 \\ &= 96 \left(\frac{1}{2}\right)^{6q} - 16 \left(\frac{1}{2}\right)^{3q} + 2 \end{aligned}$$

ここで $3q-2=n$ とすると $3q=n+2$ だから、

$$\begin{aligned} P_nP_{n+1} &= \sqrt{96 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4} - 16 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 2} \\ &= \sqrt{6 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} P_{3q-1}P_{3q}^2 &= (c_q - 1)^2 + (-b_q)^2 + (c_q - b_q + 1)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}b_q - 1\right)^2 + (-b_q)^2 + \left(-\frac{1}{2}b_q + 1\right)^2 \quad (\textcircled{1}より) \\ &= \frac{3}{2}b_q^2 - 2b_q + 2 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{2q-2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1} + 2 \\ &= 24 \left(\frac{1}{2}\right)^{6q} - 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{3q} + 2 \end{aligned}$$

ここで $3q-1=n$ とすると $3q=n+1$ だから、

$$\begin{aligned} P_nP_{n+1} &= \sqrt{24 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2} \\ &= \sqrt{6 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} P_{3q}P_{3q+1}^2 &= (a_{q+1} - c_q + 1)^2 + (a_{q+1} - 1)^2 + (-c_q)^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}c_q\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c_q - 1\right)^2 + c_q^2 \quad (\textcircled{1}より) \\ &= \frac{3}{2}c_q^2 - 2c_q + 2 \\ &= \frac{3}{32} \left(\frac{1}{8}\right)^{2q-2} - 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{q-1} + 2 \\ &= 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{6q} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3q} + 2 \end{aligned}$$

ここで $3q=n$ とすると、

$$P_nP_{n+1} = \sqrt{6 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

以上から自然数 n の値によらず、

$$P_nP_{n+1} = \sqrt{6 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2} \quad \cdots \text{答}$$