

(1) n を m ($m \geq 5$) 桁の数とすると,

n の最小値は 10^{m-1} , $S(n)$ の最大値は $9m$

$$n - 30S(n) - 2018 \geq 10^{m-1} - 270m - 2018 = a_m$$

$a_5 > 0$ であり, $5 \leq m$ で $a_{m+1} - a_m = 9 \cdot 10^{m-1} - 270 \geq 89730 > 0$ より,

$5 \leq m$ で $\{a_m\}$ は単調増加. よって, $0 < a_m$.

以上より, $n \geq 10000$ のとき, $n > 30S(n) + 2018$ ■

(2) (1)より, $n \leq 9999$.

(i) n が 3 桁以下のとき

$n = 30S(n) + 2018$ の左辺は 3 桁以下, 右辺は 4 桁以上であるから,

成立するような正の整数 n は存在しない.

(ii) n が 4 桁のとき

n の 1000 の位を a , 100 の位を b , 10 の位を c , 1 の位を d とする.

(a は 1 以上 9 以下の整数, b, c, d は 0 以上 9 以下の整数)

$$n = 30S(n) + 2018 \Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 30(a + b + c + d) + 2018$$

$$\Leftrightarrow 970a + 70b - 20c - 29d = 2018 \quad \cdots \textcircled{1}$$

1 の位に注目すると, $d = 8$ であることが必要. $d = 8$ とすると,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 970a + 70b - 20c = 2250 \Leftrightarrow 97a + 7b - 2c = 225 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$97 \leq 97a \leq 873$, $0 \leq 7b \leq 63$, $0 \leq 2c \leq 18$ より,

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 97a = 225 - 7b + 2c \leq 243$$

であるから, $a = 1$ あるいは $a = 2$

・ $a = 1$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 7b - 2c = 128 \Leftrightarrow 7b = 128 + 2c > 128$$

これをみたす 0 以上 9 以下の整数 b は存在しない.

・ $a = 2$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 7b - 2c = 31 \Leftrightarrow 7b = 31 + 2c$$

これをみたす 0 以上 9 以下の整数 b, c を考えると, $(b, c) = (5, 2), (7, 9)$

以上より, $(a, b, c, d) = (2, 5, 2, 8), (2, 7, 9, 8)$. $\therefore \underline{n = 2528, 2798}$

$$l: y - \frac{t^2 - 1}{2} = t(x - t) \Leftrightarrow y = tx - \frac{t^2 + 1}{2} \Leftrightarrow tx - y - \frac{t^2 + 1}{2} = 0$$

原点 $(0, 0)$ と l の距離 d は,
$$d = \frac{\left| \frac{t^2 + 1}{2} \right|}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + 1}$$

半円と l で囲まれた部分の面積 S は, d について単調減少.

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ より, } \frac{1}{2} \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

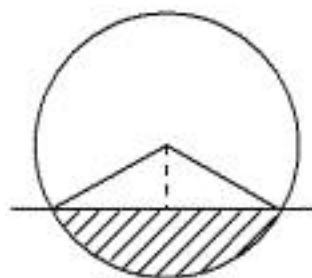
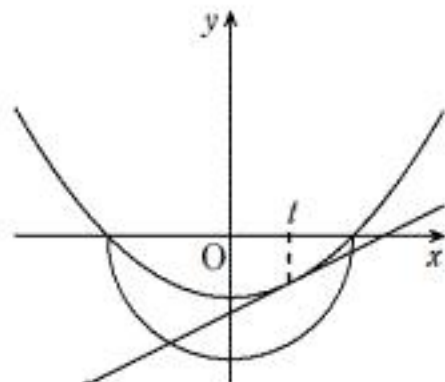
・ $d = \frac{1}{2}$ のとき, 中心角は $\frac{2}{3}\pi$.

$$\text{このとき, } S = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

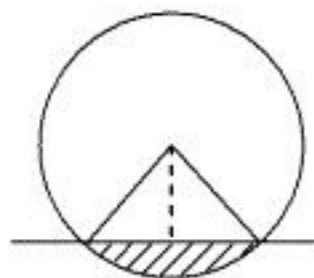
・ $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 中心角は $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{このとき, } S = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{\frac{\pi - 2}{4} \leq S \leq \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}}}$$



$$d = \frac{1}{2}$$



$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3つのさいころの目を a, b, c ($a \leq b \leq c$) とする。出る目の全場合の数は、 $6^3 = 216$ 通り。

(1) 出た目の積が6となるのは、 $(a, b, c) = (1, 1, 6), (1, 2, 3)$ 。

それぞれの場合の数は、 $3! + 3 = 9$ 通り。よって求める確率は、 $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$ 。

(2) $A: a < b < c \cdots 6$ 通り $B: a = b < c, a < b = c \cdots 3$ 通り $C: a = b = c \cdots 1$ 通り

確率が $\frac{1}{36}$ となるとき、場合の数は6通りであるから、 $A \times 1$ パターンのみ or $B \times 2$ パターンのみで表されるような

(a, b, c) の組を考える。

(i) $A \times 1$ パターンのみ

$a < b < c$ なる組合せは以下の20通り。それぞれの積の値が、他の形で表されうるかどうかを調べる。

$(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 4, 6),$
 $(1, 5, 6), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6),$
 $(3, 5, 6), (4, 5, 6)$

のうち、1パターンのみとなるものは、

$(1, 2, 5), (1, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$

(ii) $B \times 2$ パターンのみ

$(1, 1, 4)$ と $(1, 2, 2), (2, 2, 4)$ と $(1, 4, 4)$

以上より、 $k = 4, 10, 15, 16, 40, 90, 120$

四面体OPQRの体積を V とすると、 $V = \frac{1}{6}pq \dots ①$

三平方の定理より、 $RP = \sqrt{p^2 + 1}$, $PQ = \sqrt{p^2 + q^2}$, $QR = \sqrt{q^2 + 1}$

$\triangle RPQ$ で余弦定理より、

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{(p^2 + 1) + (q^2 + 1) - (p^2 + q^2)}{2\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(p^2 + 1)(q^2 + 1)} = 2 \dots ②$$

$s = p^2 + 1$, $t = q^2 + 1$ とおくと、

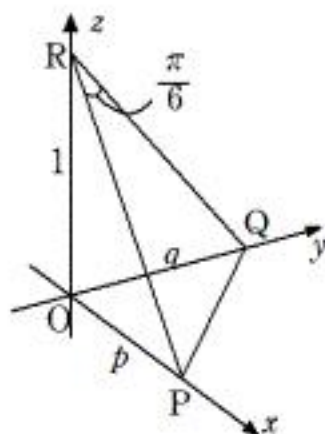
$$② \Leftrightarrow \sqrt{3st} = 2. \quad s > 1, \quad t > 1 \text{ より } st = \frac{4}{3}.$$

$V^2 = \frac{1}{36}p^2q^2 = \frac{1}{36}(s-1)(t-1) = \frac{1}{36}(st - s - t + 1)$ において、相加・相乗平均の関係より、

$$st - s - t + 1 \leq \frac{4}{3} - 2\sqrt{st} + 1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3} \quad \left(\text{等号成立は、} s = t = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ のとき} \right)$$

$$\therefore V \leq \sqrt{\frac{1}{36} \cdot \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}$$

よって、 $\underline{\underline{\max V = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}}}$



<別解> (②まで同様)

②の両辺を2乗して整理すると、 $3p^2q^2 + 3p^2 + 3q^2 - 1 = 0 \dots ③$

$s = p + q$, $t = pq$ とおくと、①より $V = \frac{1}{6}t$

$$③ \Leftrightarrow 3t^2 + 3(s^2 - 2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow s^2 + (t - 1)^2 = \frac{4}{3} \dots ④$$

また、 p, q は正の実数なので、 p, q を2解とする方程式 $f(X) = X^2 - sX + t = 0$ について、

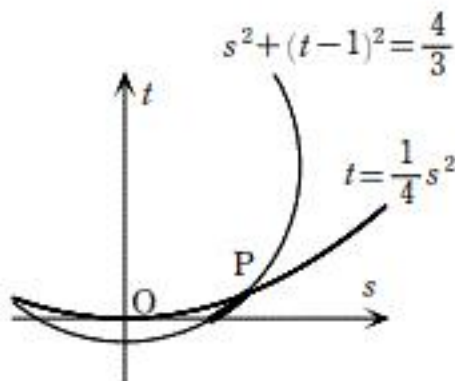
$$\begin{cases} \text{判別式 } D = s^2 - 4t \geq 0 \\ \text{軸 } 0 < \frac{s}{2} \\ f(0) = t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1}{4}s^2 \\ 0 < s \\ 0 < t \end{cases} \dots ⑤$$

よって、④⑤のもと、 $V = \frac{1}{6}t$ の最大値を考えればよい。

④かつ⑤は、右図の太線部 (端点含む)。

$s^2 + (t - 1)^2 = \frac{4}{3}$ と $t = \frac{1}{4}s^2$ の交点Pの t 座標は、 $t = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$

$$\therefore \underline{\underline{\max V = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}}}$$



(1) $y=f(x)$, $y=g(x)$ を連立して,

$$x-x^3=ax-ax^2 \Leftrightarrow x^3-ax^2+(a-1)x=0$$

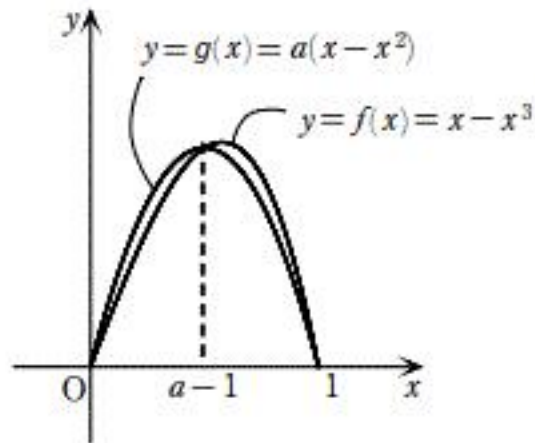
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-(a-1))=0$$

$x=a-1$ なる解が $0 < x < 1$ の範囲にあるので, $1 < a < 2$

(2) 囲まれた2つの部分の面積が等しいので,

$$\int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_0^1 |x^3 - ax^2 + (a-1)x| dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}(a-1)x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}a - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$



$$\therefore \underline{a = \frac{3}{2}}$$