

【解答】

数列 $\{a_n\}$ のすべての項が平方数になる条件を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2 \quad \text{より,}$$

$$a_3 = p^2 - 1 + 13 = p^2 + 12$$

$a_3 = q^2$ (q は自然数) とするとき,

$$q^2 = p^2 + 12 \quad \Leftrightarrow \quad (q+p)(q-p) = 12 \quad \therefore \quad (p, q) = (2, 4)$$

よって, $p = 2$ であることが必要.

$$\text{このとき, } a_3 = 16 = 4^2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 13 = 16 - 4 + 13 = 25 = 5^2$$

となって, a_4 までは平方数となるが,

$$a_5 = a_4 - a_3 + 13 = 25 - 16 + 13 = 22$$

となり, a_5 は平方数にはならない.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する. ■

【別解】

逐次代入して a_3 以降を求めると,

$$a_3 = p^2 + 12, \quad a_4 = 25, \quad a_5 = 26 - p^2, \quad a_6 = 14 - p^2, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = p^2$$

となる. このとき, $a_7 = a_1$, $a_8 = a_2$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ は周期 6 の周期数列になる.

全ての項が平方数になる必要十分条件は,

$$a_3 = p^2 + 12, \quad a_5 = 26 - p^2, \quad a_6 = 14 - p^2$$

すべてが平方数となること.

a_6 が平方数であるとき, $a_6 \geq 0$ より $p = 1, 2, 3$ で考えると,

$p = 1$ のとき a_3 , a_6 が平方数でない.

$p = 2$ のとき a_5 , a_6 が平方数でない.

$p = 3$ のとき a_3 , a_6 が平方数でない.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在する. ■

【解説】

$P(X, Y)$, $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とする.

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (2\cos \theta + 2\sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta + 2\sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} X = 2\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta = (1 + \cos 2\theta) + \sin 2\theta & \dots ① \\ Y = 2\sin \theta \cos \theta + 2\sin^2 \theta = \sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta) & \dots ② \end{cases}$$

①+②, ①-②より,

$$\sin 2\theta = \frac{X+Y-2}{2}, \quad \cos 2\theta = \frac{X-Y}{2}$$

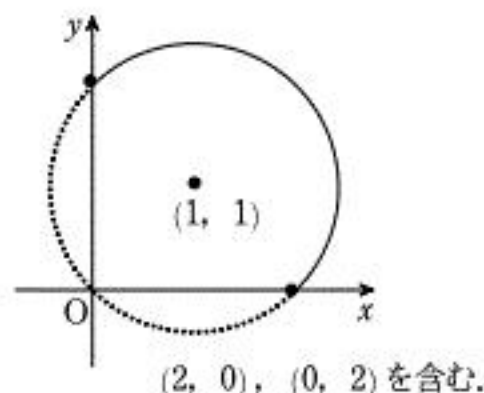
$0 \leq 2\theta \leq \pi$ より $\sin 2\theta \geq 0$ であるから, $X+Y \geq 2$

$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ より

$$\left(\frac{X+Y-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (X-1)^2 + (Y-1)^2 = 2$$

$\overrightarrow{OQ}$ の動く範囲を考えることで, 求める軌跡は

円: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ の $x+y \geq 2$ の部分となる.
これを図示すると右図のようになる.



【別解】

$|\overrightarrow{OQ}| = 1$ であることから, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = OH \cdot OQ = OH$

$|\overrightarrow{OQ}| = 1$ であることに注意すると, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH}$.

点Qが動くとき, $\angle OPA = \frac{\pi}{2}$ はつねに成り立つので,

点Pの軌跡は, 線分OAを直径とする円弧.

点Qの動く範囲を考えることで, 求める軌跡は

円: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分となる.
これを図示すると右図のようになる.

