

問題 1

(1)

曲線 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ の方程式を微分すると、 $y' = \frac{1}{2}x$ となる。よって、接点の座標を $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ とおくと、この点における接線の方程式は、

$$y = \frac{t}{2}(x - t) + \frac{t^2}{4} = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。これが、点 $A(p, q)$ を通る時、

$$q = \frac{t}{2}p - \frac{t^2}{4}$$

となる。この式を整理して、

$$\begin{aligned} t^2 - 2pt + 4q &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \quad (\because p^2 - 4q > 0) \end{aligned}$$

となる。接点の x 座標が $x = p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$ となることから、接線の傾きは $\frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$$

(2)

2つの接線が垂直に交わるには、傾きの積が -1 となればよい。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p + \sqrt{p^2 - 4q}) \cdot \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4q}) &= -1 \\ \Leftrightarrow p^2 - p^2 + 4q &= -4 \\ \Leftrightarrow q &= -1 \end{aligned}$$

となり、これが -1 となればよい。

$$\text{(答)} \quad q = -1$$

(3)

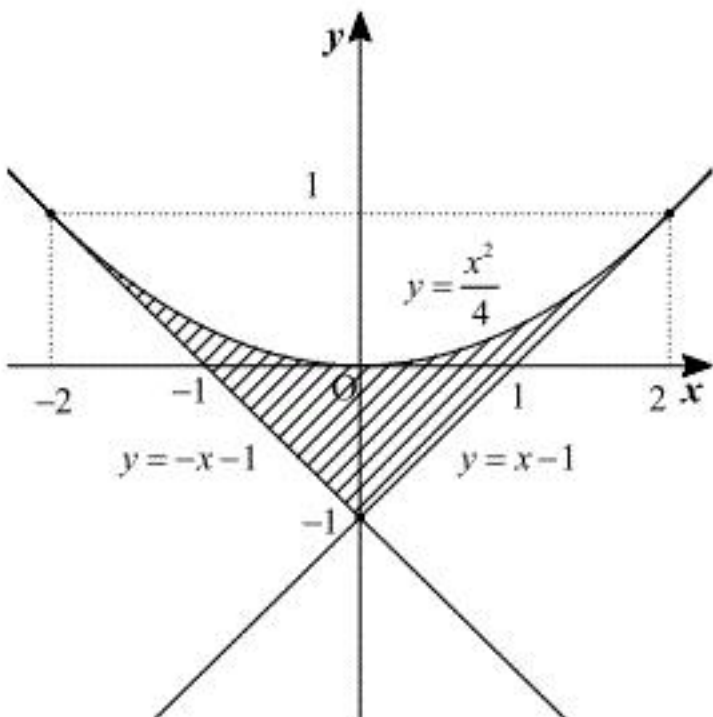
(1)より、接点の x 座標は、 $(p, q) = (0, -1)$ を代入して、

$$x = \pm \sqrt{-4 \cdot (-1)} = \pm 2$$

となる。①より、接線の方程式は、

$$y = \pm x - 1$$

となる。以上から求める面積は下図の斜線部のようになる。



上図より、求める面積は、

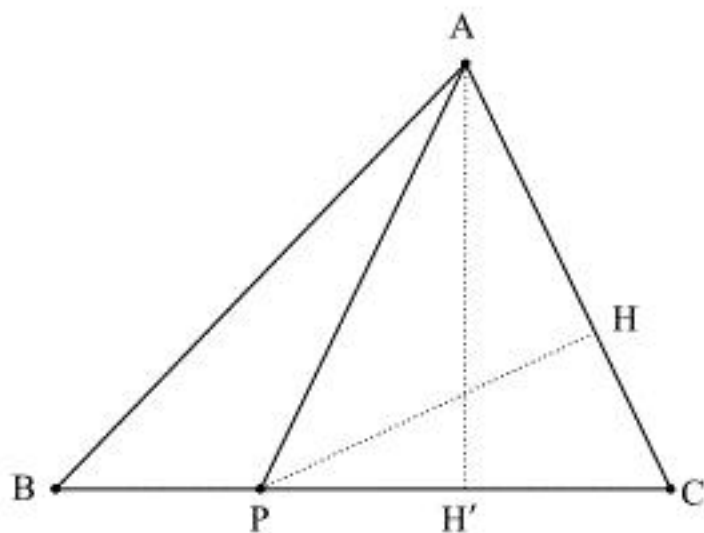
$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left\{ \frac{1}{4}x^2 - (-x - 1) \right\} dx + \int_0^2 \left\{ \frac{1}{4}x^2 - (x - 1) \right\} dx &= \int_{-2}^0 \frac{1}{4}(x + 2)^2 dx + \int_0^2 \frac{1}{4}(x - 2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{12}(x + 2)^3 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{12}(x - 2)^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{3}$$

問題 2

(1)



点 P から辺 AC に垂線を下ろした時の足を H とすると、 $\triangle APC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot PH \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $\angle PAH = \beta$ であるから、 $PH = AP \cdot \sin \beta$ となる。よって、これを①に代入して、

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AP \sin \beta$$

となる。

(証明終)

(2)

点 A から辺 BC に垂線を下ろした時の足を H' とすると、 $\triangle ABP$ 、 $\triangle APC$ の面積はそれぞれ、

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} BP \cdot AH'$$

$$\triangle APC = \frac{1}{2} PC \cdot AH'$$

となる。よって、

$$\triangle ABP : \triangle APC = \frac{1}{2} BP \cdot AH' : \frac{1}{2} PC \cdot AH' = BP : PC \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、(1)より、 $\triangle APC$ の面積 S は $S = \frac{1}{2} AC \cdot AP \sin \beta$ となる。同様に考えて、 $\triangle ABP$ の

面積は $\frac{1}{2} AB \cdot AP \sin \angle BAP$ となる。ここで、

$$\angle BAP = \angle BAC - \angle PAC = \alpha - \beta$$

であるから、 $\triangle ABP$ の面積は $\frac{1}{2} AB \cdot AP \sin(\alpha - \beta)$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \triangle ABP : \triangle APC &= \frac{1}{2} AB \cdot AP \sin(\alpha - \beta) : \frac{1}{2} AC \cdot AP \sin \beta \\ &= AB \sin(\alpha - \beta) : AC \sin \beta \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。②③より、

$$BP : PC = AB \sin(\alpha - \beta) : AC \sin \beta$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{BP \cdot AC}{AB \cdot PC} \sin \beta$$

となる。 $\angle C = 90^\circ$ のとき、

$$\begin{aligned} BP &= BC - PC \\ &= AB \sin \alpha - AC \tan \beta \\ &= AB \sin \alpha - AB \cos \alpha \tan \beta \\ &= AB(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta) \\ PC &= AC \tan \beta \end{aligned}$$

であるから、代入して

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \frac{AB(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta) \cdot AC}{AB \cdot AC \tan \beta} \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

となる。以上より示すべき等式は示せた。さらに、 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 30^\circ$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ - 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

問題 3

(1)

$b_n = a_{n+1} - a_n$ としたときに、すべての自然数 n について、 $b_n < 0$ となることを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_2 = (1+p)a - q$ であるから、

$$b_2 = a_2 - a_1 = (1+p)a - q - a = pa - q < 0$$

となり、 $b_1 < 0$ をみたす。

[2] $n=k$ で $b_n < 0$ が成り立つと仮定したとき、 $n=k+1$ でも成り立つことを示す。

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= \{(1+p)a_{k+1} - q\} - \{(1+p)a_k - q\} \\ &= (1+p)(a_{k+1} - a_k) \\ &= (1+p)b_k \end{aligned}$$

となる。 $p > 0$ であるから、 $1+p > 0$ である。また、仮定より $b_k < 0$ である。よって、

$(1+p)b_k < 0$ となり、 $b_{k+1} < 0$ となる。以上から、 $b_n < 0$ は $n=k+1$ でも成り立つ。

以上[1][2]から、すべての自然数 n について、 $b_n < 0$ となることが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1+p)a_n - q \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{q}{p} &= (1+p)\left(a_n - \frac{q}{p}\right) \end{aligned}$$

となるから、数列 $\left\{a_n - \frac{q}{p}\right\}$ は公比 $1+p$ の等比数列である。 $a_1 - \frac{q}{p} = a - \frac{q}{p}$ より、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{q}{p} &= (1+p)^{n-1} \left(a - \frac{q}{p}\right) \\ \Leftrightarrow a_n &= (1+p)^{n-1} \left(a - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = (1+p)^{n-1} \left(a - \frac{q}{p}\right) + \frac{q}{p}$$

(3)

$$\begin{aligned} \log_{10} 1.2 &= \log_{10} \frac{2^2 \cdot 3}{10} \\ &= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1 \\ &= 2 \cdot 0.3010 + 0.4771 - 1 \\ &= 0.0791 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a=100$, $p=0.2$, $q=30$ を代入すると、

$$\begin{aligned} a_n &= (1.2)^{n-1} \left(100 - \frac{30}{0.2}\right) + \frac{30}{0.2} \\ &= -50(1.2)^{n-1} + 150 \\ &= 50 \{-(1.2)^{n-1} + 3\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} (1.2)^{n-1} = 0.0791(n-1)$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから、

$$\begin{aligned} 6 \cdot 0.0791 &< 0.4771 < 7 \cdot 0.0791 \\ \Leftrightarrow \log_{10} (1.2)^6 &< \log_{10} 3 < \log_{10} (1.2)^7 \\ \Leftrightarrow (1.2)^6 &< 3 < (1.2)^7 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n \leq 7$ では $a_n > 0$ であるが、 $n \geq 8$ では $a_n < 0$ である。以上より、求める n は $n=8$ となる。

$$(\text{答}) \quad \log_{10} 1.2 = 0.0791, \quad n=8$$