

問題 1

(1)

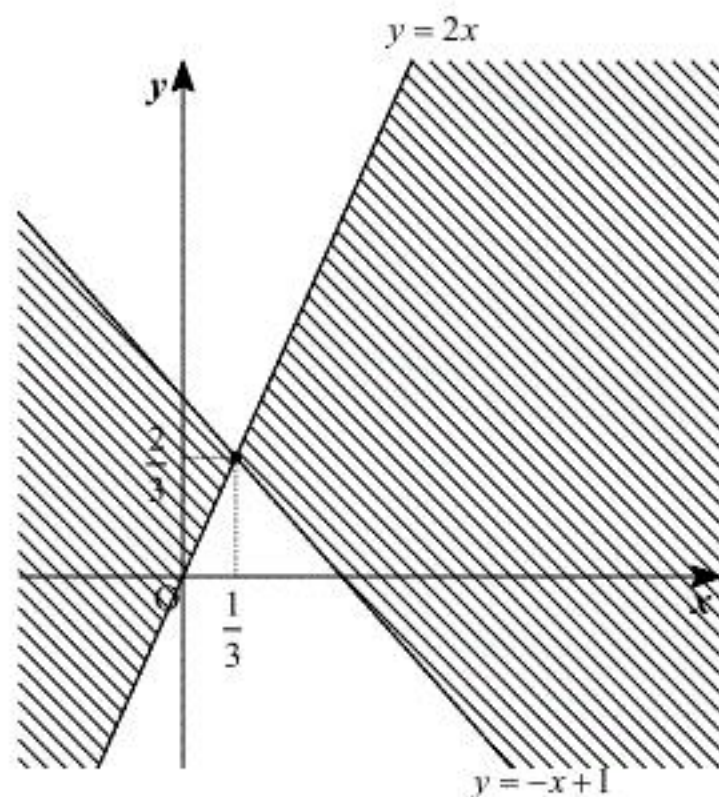
$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + xy - y^2 - 2x + y \\ &= (2x - y)(x + y - 1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $(2x - y)(x + y - 1)$

(2)

(1)より、 $P > 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x + y - 1) > 0$ となり、これを図示すると、 $y = 2x$, $y = -x + 1$ を境界とする下図の斜線部となる。ただし境界を含まない。



(答) 上図

(3)

$P = 3$ より $(2x - y)(x + y - 1) = 3$ となる。 x, y が整数の時、 $2x - y, x + y - 1$ も整数であるから、これを満たす条件は、

$$(2x - y, x + y - 1) = (1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$$

より、

$$(x, y) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right), (-1, -1), (-1, 1)$$

である。 (x, y) はともに整数であるから、求める答えは、

$$(x, y) = (-1, -1), (-1, 1)$$

となる。

(答) $(x, y) = (-1, -1), (-1, 1)$

問題 2

(1)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が任意の自然数 n について成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

①式の左辺は1、右辺は $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1) = 1$ であるから、①式が成り立つ。

[2] $n=m$ のとき

①式が成り立つと仮定すると、

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

となる。ここで、 $n=m+1$ のとき、仮定より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^m k^2 + (m+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + 7m + 6) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3) \\ &= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)\{2(m+1)+1\} \end{aligned}$$

となり、 $n=m+1$ でも①式が成立することわかる。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n において常に①が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

$$2^{a_n} > \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2017}}} \Leftrightarrow 2^{a_n} > 2^{-\frac{2017}{4}}$$

であり、底2は1より大きいので、 $a_n > -\frac{2017}{4}$ が成り立つ。また、 $a_n = -6n^2 + 1$ より、

$$-6n^2 + 1 > -\frac{2017}{4} \Leftrightarrow n^2 < \frac{2021}{24}$$

となる。 $9^2 < \frac{2021}{24} < 10^2$ かつ n は自然数より、上記の不等式を満たすものは

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

となる。

(答) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

(3)

(1)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdots 2^{a_{n-1}} \cdot 2^{a_n} \\ &= 2^{\sum_{k=1}^n a_k} \\ &= 2^{\sum_{k=1}^n (-6k^2 + 1)} \\ &= 2^{-6 \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + n} \\ &= 2^{-(2n^3 + 3n^2)} \end{aligned}$$

となる。これに $n=2$ を代入すると、 $b_2 = \frac{1}{2^{28}}$ となる。

(答) $b_2 = \frac{1}{2^{28}}, b_n = \frac{1}{2^{2n^3 + 3n^2}}$

問題 3

(1)

三角関数の加法定理より、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

となる。これらの各辺を足し合わせると、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ となる。

$\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = B$ とおくと、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

が得られる。

(証明終)

(2)

三角形 ABC において $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ に向かい合う辺をそれぞれ a , b , c とおくと、正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \text{ である。ここで、} L = a + b + c \text{ であり、正弦定理より } \angle C \text{ が一定のとき}$$

c も一定である。ゆえに、 L が最大になるのは $a + b = 2(\sin A + \sin B)$ が最大するときである。こ

こで、 $A + B + C = \pi \Leftrightarrow B = \pi - A - C$ より、(1)の結果から、

$$\begin{aligned} 2(\sin A + \sin B) &= 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 4 \sin \frac{\pi-C}{2} \cos \left(A - \frac{\pi-C}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < C < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi-C}{2} < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \frac{\pi-C}{2} > 0$ であるから、 $\cos \left(A - \frac{\pi-C}{2} \right)$ が

最大の時、 L も最大となる。ここで、 $\cos \left(A - \frac{\pi-C}{2} \right) \leq 1$ であり、 $0 < A < \pi$ より、 $A = \frac{\pi-C}{2}$ の

とき、 $\cos \left(A - \frac{\pi-C}{2} \right) = 1$ となるから L は最大となる。このとき、

$$B = \pi - \frac{\pi-C}{2} - C = \frac{\pi-C}{2}$$

となるから、 $A = B$ である。

(証明終)

(3)

$A = B$ より $A + B + C = \pi \Leftrightarrow 2A + C = \pi$ である。ゆえに、 $A = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ となる。このとき、正弦定

理、および2倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} L &= a + b + c \\ &= 2(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 4 \sin A + 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\ &= 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) + 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} + 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \left(1 + \sin \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} L^2 &= 16 \cos^2 \frac{C}{2} \left(1 + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \\ &= 16 \left(1 - \sin^2 \frac{C}{2} \right) \left(1 + 2 \sin \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

と表せる。 $t = \sin \frac{C}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} L^2 &= 16(1-t^2)(1+2t+t^2) \\ &= 16(-t^4-2t^3+2t+1) \end{aligned}$$

となり、 $L^2 = f(t)$ において微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 16(-4t^3-6t^2+2) \\ &= -32(2t^3+3t^2-1) \\ &= -32(t+1)^2(2t-1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 C は三角形の内角であることより、 $0 < C < \pi$ である。 $\sin \frac{C}{2} = t$ より t の範囲

は $0 < t < 1$ であることに注意すると、増減表は以下ようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

増減表より、 L^2 は $t = \frac{1}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 27$ をとる。 $t = \frac{1}{2}$ より $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ であり、 $0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$ より

$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$ が得られる。ゆえに、 $L^2 = f(t)$ を最大にする C の値は $\frac{\pi}{3}$ と求まる。

(答) L^2 の最大値: 27, C の値: $\frac{\pi}{3}$