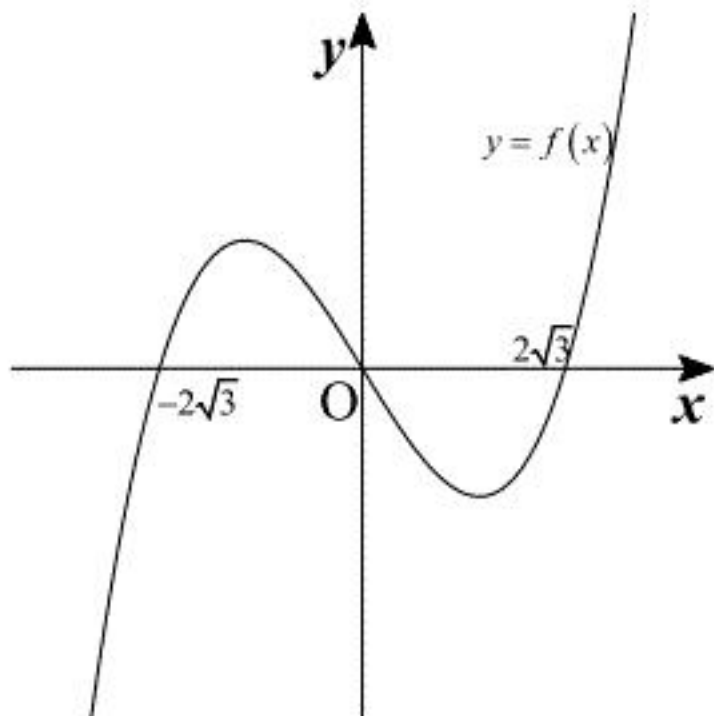


問題 1

(1)



x 軸と $y = f(x)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 12) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 x 軸の $x \geq 0$ の部分と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} -\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x\right) dx &= \left[-\frac{1}{36}x^4 + \frac{2}{3}x^2\right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) 4

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}(x^2 - 4) \end{aligned}$$

となる。よって、曲線 $y = f(x)$ の点 $(p, f(p))$ における接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x - p) + f(p) \\ &= \frac{1}{3}(p^2 - 4)(x - p) + \frac{1}{9}p^3 - \frac{4}{3}p \\ &= \frac{1}{3}(p^2 - 4)x - \frac{2}{9}p^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \ y = \frac{1}{3}(p^2 - 4)x - \frac{2}{9}p^3$$

(3)

曲線 $y = f(x)$ と接線 l の交点の x 座標は、2 式を連立して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x &= \frac{1}{3}(p^2 - 4)x - \frac{2}{9}p^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3p^2x + 2p^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - p)^2(x + 2p) &= 0 \\ \therefore x &= p, -2p \end{aligned}$$

となる。したがって、点 B の x 座標は $x = -2p$ である。

$$(答) \ x = -2p$$

(4)

接線 m の方程式の傾きは

$$f'(-2p) = \frac{4}{3}(p^2 - 1)$$

である。また、接線 l の傾きは $\frac{1}{3}(p^2 - 4)$ である。ここで直交条件より

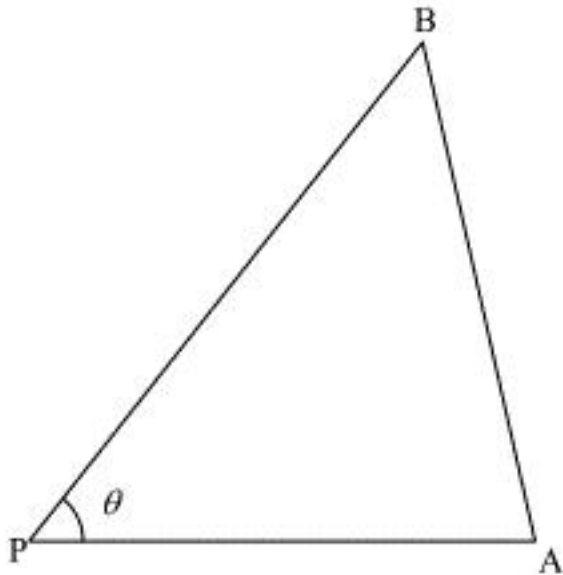
$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(p^2 - 1) \cdot \frac{1}{3}(p^2 - 4) &= -1 \\ \Leftrightarrow p^4 - 5p^2 + \frac{25}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(p^2 - \frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\ \therefore p^2 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $p > 0$ より求める p の値は $p = \frac{\sqrt{10}}{2}$ である。

$$(答) \ p = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

問題 2

(1)



$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ であるから

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2}$$

となる。よって

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

となる。

(証明終)

(2)

条件より $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ とおける。したがって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2, |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

となる。よって、 $\triangle PAB$ の面積を S として

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\ &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

点 P を原点に平行移動させるとき、 x 軸方向に $+4$ 、 y 軸方向に -1 移動する。これと同様の移動を点 A, B にも行い、移動後の点をそれぞれ A', B' とすると、 $A'(t+4, -1), B'(4, t+6)$ となる。ここで $\triangle PAB$ の面積と $\triangle OA'B'$ の面積は等しいから $\triangle PAB$ の面積を S として(2)より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(t+4)(t+6) - (-1) \cdot 4| \\ &= \frac{1}{2} |t^2 + 10t + 28| \\ &= \frac{1}{2} |(t+5)^2 + 3| \\ &= \frac{1}{2} (t+5)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle PAB$ は $t = -5$ のとき最小値 $\frac{3}{2}$ をとる。

(答) $\frac{3}{2}$

問題 3

(1)

2つの円 $C_{p,q}, C_{m,n}$ は x 軸と接するので、円の半径はそれぞれ $\frac{1}{2q^2}, \frac{1}{2n^2}$ となる。また、これらの円が外接することと、2つの円の中心間距離と半径の和が等しくなることは同値である。よって、三平方の定理より、これは

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q^2} - \frac{1}{2n^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2q^2} + \frac{1}{2n^2}\right)^2 \\ & \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} - \frac{2mp}{nq} + \frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{q^2n^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow q^2m^2 - 2mnpq + p^2n^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow (qm - pn)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow |qm - pn| = 1 \end{aligned}$$

と同値である。ここで $p > 0, q > 0, m > 0, n > 0$ から

$$\frac{p}{q} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow qm - pn > 0$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} & |qm - pn| = 1 \\ & \Leftrightarrow qm - pn = 1 \end{aligned}$$

となる。上記の変形は同値変形であるから、 $qm - pn = 1$ であることは2つの円 $C_{p,q}, C_{m,n}$ が外接するための必要十分条件である。

(証明終)

(2)

(1)より2つの円 $C_{2,4}, C_{m,n}$ が外接するための必要十分条件は $4m - 2n = 1$ が成り立つことである。しかし、 m, n は正の整数であるから $4m, 2n$ はともに偶数である。したがって $4m - 2n$ も偶数となる。つまり $4m - 2n = 1$ は成立しない。よって、2つの円 $C_{2,4}, C_{m,n}$ は外接しない。

(証明終)

(3)

2つの円 $C_{79,145}, C_{m,n}$ が外接するための条件は(1)より $145m - 79n = 1$ が成り立つことである。ここで

$$145m - 79n = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

とする。よって、この方程式①を満たし、かつ $n \leq 300$ である n を考える。ここで、

$$\begin{aligned} & 145m - 79n = 1 \\ & \Leftrightarrow -13m - 79(n - 2m) = 1 \\ & \Leftrightarrow -13\{m + 6(n - 2m)\} - (n - 2m) = 1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m + 6(n - 2m) = 0 \\ n - 2m = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $m = 6, n = 11$ は方程式 $145m - 79n = 1$ を満たす解であるから

$$145 \cdot 6 - 79 \cdot 11 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。① - ②より

$$\begin{aligned} & 145(m - 6) - 79(n - 11) = 0 \\ & \Leftrightarrow 145(m - 6) = 79(n - 11) \end{aligned}$$

となる。ここで145と79は互いに素であるから整数 k を用いて

$$\begin{aligned} & n - 11 = 145k \\ & \Leftrightarrow n = 145k + 11 \end{aligned}$$

と表せる。 $k = 1$ のとき $n = 156$ 、 $k = 2$ のとき $n = 301$ であるから求める n は $n = 156$ である。

(答) $n = 156$