

平成30年度入学試験問題

数 学

(教 員 養 成 課 程)

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開かないこと。
- 2 問題冊子は表紙を含めて1～3ページです。
- 3 解答用紙は3枚、計算用紙は1枚です。
- 4 解答は指定された解答用紙に記入すること。裏面には何も書かないこと。
- 5 受験番号は解答用紙の指定欄に記入すること。
- 6 解答は、答えだけではなく、計算の過程や説明も書くこと。
- 7 解答用紙のみを提出し、問題冊子・計算用紙は試験終了後、持ち帰ること。なお、いかなる理由があっても解答用紙以外（計算用紙など）は受理しません。
- 8 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は、手を挙げて監督者に知らせること。

問題 1 (70 点)

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x$ とする。曲線 $y = f(x)$ の点 $A(p, f(p))$ における接線を ℓ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $p > 0$ とする。

- (1) x 軸の $x \geq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ の共有点のうち、点 A と異なる点を B とする。点 B の x 座標を p を用いて表せ。
- (4) (3) の点 B における曲線 $y = f(x)$ の接線を m とする。 ℓ と m が垂直に交わる時の p の値を求めよ。

問題 2 (70 点)

$\triangle PAB$ において、 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\angle APB = \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

- (2) 3 点 P, A, B の座標がそれぞれ $(0, 0)$, (a_1, a_2) , (b_1, b_2) であるとき、 $\triangle PAB$ の面積は $\frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ となることを示せ。
- (3) t を実数とする。3 点 P, A, B の座標がそれぞれ $(-4, 1)$, $(t, 0)$, $(0, t+7)$ であるとき、 $\triangle PAB$ の面積の最小値を求めよ。

問題 3 (60 点)

p, q を正の整数とする。座標平面上の点 $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ を中心とし、 x 軸と接する円を $C_{p,q}$ で表すことにする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、以下では m, n も正の整数とする。

- (1) $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ とする。 $qm - pn = 1$ であることは、2つの円 $C_{p,q}$ と $C_{m,n}$ が外接するための必要十分条件であることを示せ。
- (2) $\frac{1}{2} < \frac{m}{n}$ のとき、(1) を用いて、2つの円 $C_{2,4}$ と $C_{m,n}$ が外接しないことを示せ。
- (3) $\frac{79}{145} < \frac{m}{n}$ のとき、(1) を用いて、2つの円 $C_{79,145}$ と $C_{m,n}$ が外接するような円 $C_{m,n}$ のうち、 $n \leq 300$ の範囲で n が最大であるものを求めよ。