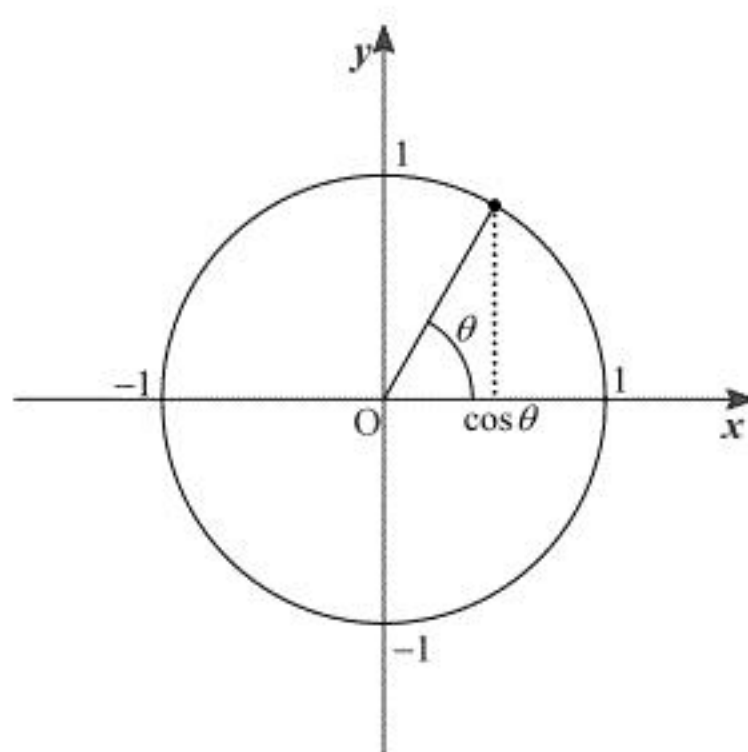


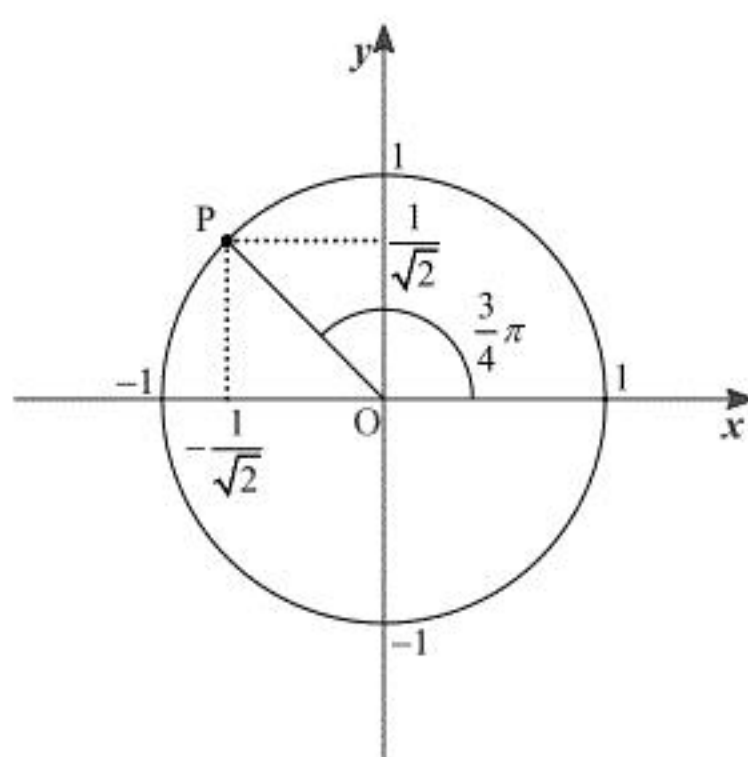
# 問題 1

(1)

$\cos \theta$  は  $x$  軸の正の方向から測った回転角が  $\theta$  となる動径と、単位円の交点の  $x$  座標として表される。以下に、単位円と回転角が  $\theta$  の動径を図示する。



ここで上記の定義より、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$  となるような図を考えればよい。単位円と動径の交点を P として、以下にそれを示す。



上図において、点 P の座標は  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  であるから、 $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  が成り立つ。

(証明終)

(2)

$t = \cos x$  とすると、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  より  $-1 \leq t \leq 0$  である。また、倍角の公式および三角関数の性質より、 $y$  を  $t$  の式で表すと、

$$\begin{aligned} y &= \sin x \sin 2x + \cos x \\ &= 2 \sin^2 x \cos x + \cos x \\ &= 2(1 - \cos^2 x) \cos x + \cos x \\ &= -2 \cos^3 x + 3 \cos x \\ &= -2t^3 + 3t \end{aligned}$$

となる。

(答)  $-1 \leq t \leq 0$ ,  $y = -2t^3 + 3t$

(3)

$y = -2t^3 + 3t$  より

$$y' = -6t^2 + 3 = -6\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。これより、 $-1 \leq t \leq 0$  の範囲で  $y' = 0$  を満たすのは  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  であるから、 $y$  の増減表は以下ようになる。

|      |    |            |                       |            |   |
|------|----|------------|-----------------------|------------|---|
| $t$  | -1 | ...        | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ...        | 0 |
| $y'$ |    | -          | 0                     | +          |   |
| $y$  | -1 | $\searrow$ | $-\sqrt{2}$           | $\nearrow$ | 0 |

上表より、 $y$  は

$$t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき 最大値 } 0$$

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき 最小値 } -\sqrt{2}$$

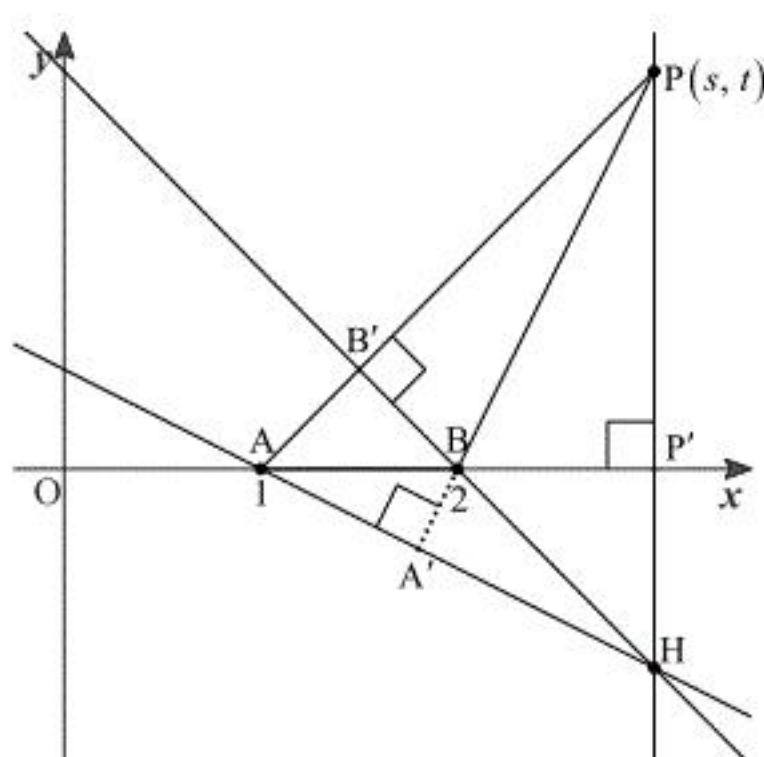
をとる。

(答) 最大値：  $0 (x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき})$ , 最小値：  $-\sqrt{2} (x = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき})$

## 問題 2

(1)

$\triangle ABP$ において、頂点  $A, B, P$  から対辺あるいはその延長に下ろした垂線の足を、それぞれ  $A', B', P'$  とする。以下にそれを図示する。



まず、直線  $AA'$  は点  $A(1, 0)$  を通り  $\overline{BP} = (s-2, t)$  に垂直であるから、直線  $AA'$  の方程式は

$$(s-2)(x-1)+ty=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。次に、直線  $BB'$  は点  $B(2, 0)$  を通り  $\overline{AP} = (s-1, t)$  に垂直であるから、直線  $BB'$  の方程式は

$$(s-1)(x-2)+ty=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。また、直線  $PP'$  の方程式は

$$x=s \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ よりの直線  $AA'$  と  $PP'$  の交点の座標は、 $t > 0$  より

$$\left(s, -\frac{(s-2)(s-1)}{t}\right)$$

であり、 $\textcircled{2}$ に代入すると成り立つことから、この点は直線  $BB'$  上にもある。したがって、3本の垂線  $AA', BB', PP'$  は1点  $H\left(s, -\frac{(s-2)(s-1)}{t}\right)$  で交わる。

(証明終)

(2)

点  $P(s, t)$  が曲線  $y = \frac{1}{x} (x > 0)$  上を動くとき

$$\left\{t = \frac{1}{s}\right\} \text{ かつ } \left\{s > 0\right\}$$

が成り立つ。ここで、点  $H$  の  $x$  座標、 $y$  座標をそれぞれ  $x_H, y_H$  とすると

$$\begin{cases} x_H = s > 0 \\ y_H = -\frac{(s-2)(s-1)}{t} = -s(s-1)(s-2) \end{cases}$$

となるから、求める点  $H$  の軌跡は

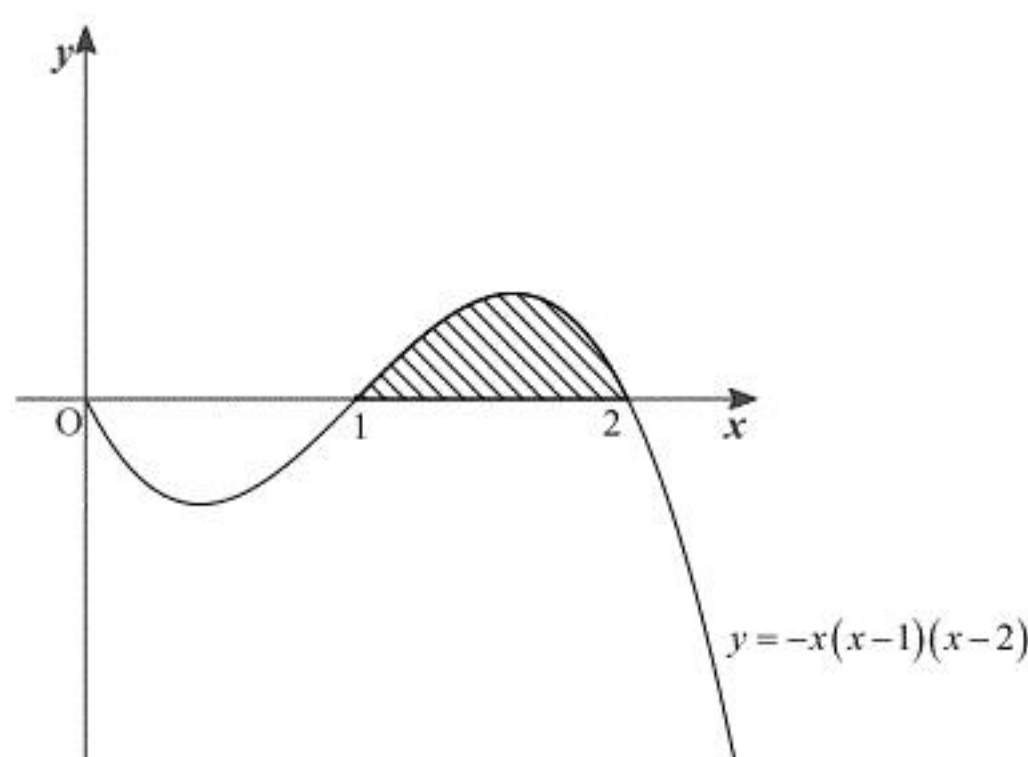
$$y = -x(x-1)(x-2) \quad (x > 0)$$

である。

(答)  $y = -x(x-1)(x-2) \quad (x > 0)$

(3)

$y = -x(x-1)(x-2) \quad (x > 0)$  のグラフの概形および、求めるべき面積を斜線部で図示する。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{-x(x-1)(x-2)\} dx &= \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{16}{4} + 8 - 4\right) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{1}{4}$

### 問題 3

(1)

$n$  回目の移動のあとに点 P が頂点 A にあって、次も頂点 A にとどまることはない。 $n$  回目の移動のあとに点 P が頂点 B, C にあって、次に頂点 A に移動する確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}b_n, \frac{1}{2}c_n$  である。したがって、 $n+1$  回目の移動のあとに点 P が頂点 A にある確率は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

(2)

数学的帰納法を利用して、すべての自然数  $n$  について  $b_n = c_n$  が成り立つことを示す。

[1]  $n=1$  のとき

$$b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{2} \text{ であるから}$$

$$b_1 = c_1$$

が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき  $b_k = c_k$  が成り立つと仮定したとき

$n=k+1$  のときを考えると、(1)と同様に

$$\begin{cases} b_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}c_k \\ c_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}b_k \end{cases}$$

が成り立つ。仮定より  $b_k = c_k$  であるから

$$b_{k+1} = c_{k+1}$$

が成り立つ。

以上、[1], [2]より数学的帰納法からすべての自然数  $n$  について  $b_n = c_n$  が成り立つ。

(証明終)

(3)

点 P は頂点 A, B, C のいずれかに必ずあるから、

$$a_n + b_n + c_n = 1 \Leftrightarrow b_n + c_n = 1 - a_n$$

が成り立つ。これと、(1)の結果から

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n) \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

が成り立つ。よって、数列  $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$  は初項  $a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ 、公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(4)

$a_n + b_n + c_n = 1, b_n = c_n$  より

$$a_n + 2b_n = 1 \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2}(1 - a_n)$$

が成り立つ。(2)より、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\left[1 - \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= \left|\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right| \\ &= \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &< \frac{1}{10^5} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} &< \frac{1}{10^5} \\ \Leftrightarrow 2^n &> 10^5 \end{aligned}$$

となり、両辺の常用対数を取ると

$$\begin{aligned} n \log_{10} 2 &> 5 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{5}{\log_{10} 2} \quad (\because \log_{10} 2 > 0) \\ \Leftrightarrow n &> 16.61 \cdots \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、求める最小の自然数  $n$  の値は

$$n = 17$$

である。

(答)  $n = 17$