

数 学

(理系学部)

12:40~14:40

解 答 上 の 注 意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。

2. 問題紙は3ページある。

3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学2-1

(問①用),

解答用紙番号
数学2-2

(問②用),

解答用紙番号
数学2-3

(問③用),

解答用紙番号
数学2-4

(問④用)

解答用紙番号
数学2-5

(問⑤, ⑥用)の5枚である。

4. 解答用紙は5枚とも全部かならず提出せよ。

5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所にかならず記入せよ。

6. 各問に対する解答は、それぞれ3で指定された解答用紙に記入し、裏面を使用してはならない(1問題1枚)。

7. 問⑤, ⑥は選択問題である。いずれか一方のみ解答せよ。

8. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。

9. 下書き用紙は回収しない。問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。

(理 系 学 部)

1 実数 x に対して、 x 以下の整数のうちで最大のものを $[x]$ と書くことにする。
 $c > 1$ として、 $a_n = \frac{[nc]}{c}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。以下の(1), (2), (3)を証明せよ。

- (1) すべての n に対して、 $[a_n]$ は n または $n - 1$ に等しい。
- (2) c が有理数のときは、 $[a_n] = n$ となる n が存在する。
- (3) c が無理数のときは、すべての n に対して $[a_n] = n - 1$ となる。

2 (1) p を正の定数とし、点 $F(0, p)$ を焦点にもち、 $y = -p$ を準線とする放物線を C とする。 C 上の点 $Q(x_0, y_0)$ (ただし $x_0 \neq 0$) を考え、点 Q と F を通る直線を ℓ_1 、点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を ℓ_2 とする。このとき、点 Q における C の接線 ℓ は、 ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を 2 等分することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$ 上の点 $R(a, b)$ ($a > \sqrt{2}$) における接線と直線 $x = a$ のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。点 R を通り傾きが $\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

3 p を 0 でない実数とする。数列 $a_1, a_2, \dots$ をつぎのように定義する。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + p^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

- (1) $|p| = 1$ のとき、 a_n を求めよ。
- (2) $|p| \neq 1$ のとき、 a_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

4 a を実数として、関数 $f(x) = \{x^2 - (a+2)x + a+2\}e^x$ を考える。

- (1) $a \neq 0$ のとき、 $f(x)$ の極小値を b とする。 b を a で表せ。
- (2) (1) で求めた b を a の関数とみて、 $b = g(a)$ と表す。ただし、 $a = 0$ のとき $g(0) = 2$ と定める。このとき、関数 $b = g(a)$ のグラフと a 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

5 , **6** は選択問題である。いずれか一方のみ解答せよ。

5 複素数 α, β (ただし、 $\alpha\beta \neq 0$) が与えられている。 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d は実数、 $i = \sqrt{-1}$) とおく。

- (1) 複素数 z_0 を、 $\overline{\alpha} + \beta \neq 0$ の場合は $z_0 = (b-d) + (a+c)i$ と定め、
 $\overline{\alpha} + \beta = 0$ の場合は $z_0 = -a + bi$ と定める。 $|\alpha| = |\beta|$ のとき、 z_0 は z の方程式 $\alpha z + \beta \overline{z} = 0$ の解であって、 $z_0 \neq 0$ となることを示せ。

- (2) $|\alpha| \neq |\beta|$ のとき、 z の方程式

$$\alpha z + \beta \overline{z} + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の解の実部と虚部を a, b, c, d で表せ。

- (3) $|\alpha| = |\beta|$ かつ方程式①がある複素数 z_1 を解にもつとする。このとき、
①は z_1 と異なる解をもつことを示せ。

6 3 個のさいころを同時に振る試行において、出た目の数の積が 4 で割り切れる事象を A とする。

- (1) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ。
- (2) この試行を 4 回繰り返したとき、事象 A が 2 回以上起こる確率を求めよ。
- (3) この試行を n 回繰り返したとき、事象 A が k 回起これば $X = 3^k$ で確率変数 X を定義する。このとき、 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。