

1

関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^2 + ax + b,$$

$$g(x) = x + c$$

ただし, a, b, c は定数とする。

(1) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで, $0 \leq x \leq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。

2

- (1) 1000 から 9999 までの4桁の自然数のうち, 1000 や 1212
のようにちょうど2種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。
- (2) n 桁の自然数のうち, ちょうど2種類の数字から成り立っているものの個数
を求めよ。

3

a, b を $2b < 3a < 6b$ を満たす正の定数とする。

(1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 12 \\ a(x - 3) + b(y - 2) \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(2) 実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき、 $x + y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

4

次の問いに答えよ。ただし、 i を虚数単位とする。

- (1) $\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ として x についての恒等式

$$(x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

を示せ。

- (2) n は 5 以上の自然数とする。 $\beta = \cos \frac{360^\circ}{n} + i \sin \frac{360^\circ}{n}$ として、等式

$$(1 - \beta)(1 - \beta^2)(1 - \beta^3) \cdots (1 - \beta^{n-1}) = n$$

を示せ。