

1

$f(x)$ を微分可能な関数とする。

- (1) n を自然数とするとき、等式

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = x^n \quad (x \neq 1)$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

- (2) 任意の実数 x, a に対して、等式

$$\frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{2} (f(x) + f(a)) \quad (x \neq a)$$

を満たし、かつ条件 $f(0) = 1$ および $f'(0) = 2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

2

- (1) 1 0 0 0 から 9 9 9 9 までの 4 桁の自然数のうち, 1 0 0 0 や 1 2 1 2 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。
- (2) n 桁の自然数のうち, ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

3

xy 平面上の異なる 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ($x_2 \neq 0$) に対して点 $C(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, 点 $D(x_2, 0)$ をとり, 直線 AC と y 軸の交点を E とする。ただし, 原点 O は直線 AB 上にはないとする。

- (1) 直角三角形 ODE の面積を S とするとき, S を x_1, y_1, x_2, y_2 で表せ。
- (2) A, B が楕円 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上を動くとき, S の最大値を a, b で表せ。
- (3) A, B が L 上にあって(2)で求めた S の最大値を与えるとき, 点 C は楕円 $\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2 = 1$ 上にあることを示せ。

4

n を 3 以上の自然数とするとき、次を示せ。

ただし、 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ とし、 i を虚数単位とする。

$$(1) \quad \alpha^k + \bar{\alpha}^k = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}$$

ただし、 k は自然数とし、 $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

$$(2) \quad n = (1 - \alpha)(1 - \alpha^2) \cdots (1 - \alpha^{n-1})$$

$$(3) \quad \frac{n}{2^{n-1}} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{n-1}{n} \pi$$

5

2点 $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ を通る直線を ℓ とし, 中心が $R(0, 0, 2)$ で半径が1の球面を C とする。点 P が ℓ 上にあり点 Q が C 上にあるとし, 線分 PQ は直線 ℓ と線分 RQ に垂直であるとする。

- (1) 点 P の存在する範囲を求めよ。
- (2) 線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。