

1

(1) 連立して y を消去すると

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 6 = 0$$

$\Rightarrow a$ は x の二次方程式 x_1, x_2 となる

$$x_1 + x_2 = a \quad \text{--- ①}$$

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 - 6}{2} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{条件より } x_1 - x_2 = 2 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{①と③を解くと } x_1 = \frac{a+2}{2}, x_2 = \frac{a-2}{2}$$

これを②より

$$6 = a^2 - 2x_1 x_2 = \frac{a^2 + 4}{2} \quad \text{--- [答]}$$

$$(2) \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2ax - a^2 + 6 \end{cases}$$

これから x を消去すると $2y = 2ax - a^2 + 6$

$$2y = 2ax - a^2 + 6$$

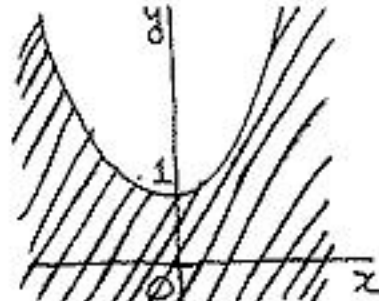
これを(1)の結果を代入して、 a について整理すると

$$a^2 - 4ax + 4y - 4 = 0$$

これが実数 a を持つためには

$$D/4 = 4x^2 - 4y + 4 \geq 0$$

$$\therefore y \leq x^2 + 1 \quad \text{--- [答]}$$



2

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)dx = \int_0^1 (2ax+b)(px+q)dx$$

$$= \int_0^1 \{2apx^2 + (bp+2aq)x + bq\}dx$$

$$= \frac{2}{3}ap + \frac{bp+2aq}{2} + bq = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4ap + 3(bp+2aq) + 6bq = 3$$

$$\Leftrightarrow (4a+3b)p + 6(a+b)q = 3 \quad \text{--- ①}$$

$$\int_{-1}^1 f'(x)(px+q)dx = 2 \int_0^1 (2apx^2 + bq)dx$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}ap + bq \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2ap + 3bq = 0 \quad \text{--- ②}$$

p, q の連立方程式の実数解をもつための条件を求めよ。

①, ②を pq 平面上の2直線としてとらえ、②が原点 O を通過する a に対し①は不通過 (定数項を比較) な a である。これを一致するとはしない。よって、平行にならなければならない。

よって

$$(4a+3b):6(a+b) \neq 2a:3b$$

$$\Leftrightarrow 3b(4a+3b) \neq 2a(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 \neq 9b^2 \Leftrightarrow 4a^2 - 3b^2 \neq 0$$

求める条件である。

$\Rightarrow$ 条件 a 下で解ける

$$p = \frac{3b}{3b^2 - 4a^2}, q = \frac{2a}{4a^2 - 3b^2}$$

とある。

3

(1) P は底面 ABC 上の点 H である。 $\triangle PAH \equiv \triangle PBH \equiv \triangle PCH$ である。

$$AH = BH = CH \Rightarrow H \text{ は正三角形 } ABC \text{ の重心}$$

よって

$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times 3 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow PH = \sqrt{PA^2 - AH^2}$$

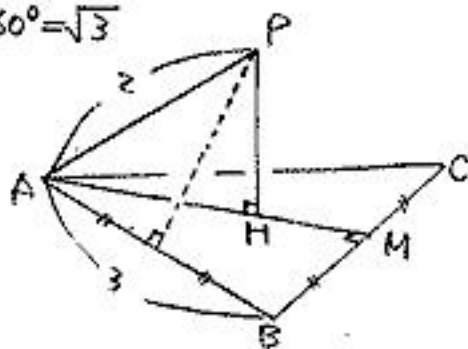
$$= \sqrt{4 - 3} = 1$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

よって、求める

$$\frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



(2) $AE = AF$ より $\triangle AEF$ も正三角形である。 $\triangle PAE \equiv \triangle PAF$ より $\triangle PEF$

は二等辺三角形である。

$$AE = AF = EF = x \text{ とおくと}$$

$$\cos \angle PAE = \cos \angle PAB = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$$

よって、 $\triangle PAE$ に余弦定理を用いて

$$PE^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \frac{3}{4}$$

$$= x^2 - 3x + 4$$

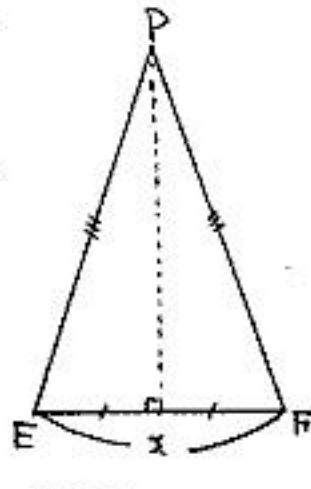
次に、 $\triangle PEF$ に余弦定理を用いると

$$EF^2 = PE^2 + PF^2 - 2 \times PE \times PF \times \cos \angle EPF$$

$$= PE^2 \times (2 - 2 \cos \angle EPF) = \frac{2}{5} PE^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{5} (x^2 - 3x + 4) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{\sqrt{33}}{3} - 1 (>0) \text{ と得る。}$$



4

(1) n 回の移動 a 中で k 回 a を正方向へ a を移動したとすれば

$$X(n) = 1 \times k + (-1) \times (n-k) = 2k - n \text{ である。}$$

$$\text{よって } X(8) = 2 \Leftrightarrow 2k - 8 = 2 \Leftrightarrow k = 5 \text{ であり、}$$

求める確率は

$$8C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8C_5}{2^8} = \frac{56}{2^8} = \frac{7}{32}$$

(2) $n=7$ とし、 $2k-7$ ($k=0, 1, \dots, 7$) a 通り得る通を

考え、 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$ であり、 $|X(7)|$ a 通り得る通

は $1, 3, 5, 7$ a 通り得る。

$$|X(7)| = 1 \Leftrightarrow k=3, k=4$$

$$\text{--- 確率は } \frac{2C_3 + 2C_4}{2^7} = \frac{2C_3}{2^6} = \frac{35}{64}$$

$$|X(7)| = 3 \Leftrightarrow k=2, k=5$$

$$\text{--- 確率は } \frac{2C_2 + 2C_5}{2^7} = \frac{2C_2}{2^6} = \frac{21}{64}$$

$$|X(7)| = 5 \Leftrightarrow k=1, k=6$$

$$\text{--- 確率は } \frac{2C_1 + 2C_6}{2^7} = \frac{2C_1}{2^6} = \frac{7}{64}$$

$$|X(7)| = 7 \Leftrightarrow k=0, k=7$$

$$\text{--- 確率は } \frac{2C_0 + 2C_7}{2^7} = \frac{2C_0}{2^6} = \frac{1}{64}$$

よって、 $|X(7)|$ の期待値は

$$\frac{1 \times 35 + 3 \times 21 + 5 \times 7 + 7 \times 1}{64} = \frac{140}{64} = \frac{35}{16}$$

(3) 正方向にも負方向にも1ずつ a を移動したとき、一度も O には

いらない。1回目 a を移動 $+1$ である場合、 $X > 0$ を保ち

ながら2回目~6回目 a を移動して行なうことである。

これを右の図で表わせば

条件を満たす移動の方法は

10通りとわかる。それぞれ

に $\frac{1}{2}$ の確率で $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ である。

よって、求める確率は

$$2 \times \left\{ 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}$$

$$= 2 \times \frac{10}{64} = \frac{5}{16}$$

とわかる。

