

1

(1) 連立して y を消去すると

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 6 = 0.$$

$\therefore a$ は解が x_1, x_2 となるから

$$x_1 + x_2 = a. \quad \text{--- ①}$$

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 - 6}{2} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{条件より } x_1 - x_2 = 2 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{①と③を解くと } x_1 = \frac{a+2}{2}, x_2 = \frac{a-2}{2}$$

これと②より

$$6 = a^2 - 2x_1 x_2 = \frac{a^2 + 4}{2} \quad \text{--- [答]}$$

(2) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2ax - a^2 + 6 \end{cases}$

これらを加えると $2y = 2ax - a^2 + 6$

$$\therefore y = ax - \frac{a^2}{2} + 3$$

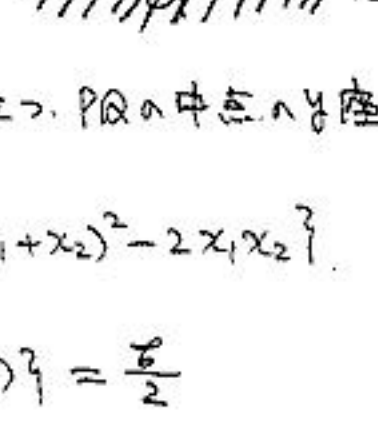
これを(1)の結果を代入して、 a に関する方程式は

$$a^2 - 4ax + 4y - 4 = 0$$

これが実数解をもつ a を持つためには

$$D/4 = 4x^2 - 4y + 4 \geq 0$$

$$\therefore y \leq x^2 + 1 \quad \text{--- [答]}$$



(3) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$ が成り立つ。PQの中点Mの座標を m とすると

$$m = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{1}{2} \{ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \}$$

①, ②を代入して、

$$m = \frac{1}{2} \{ a^2 - (a^2 - 6) \} = \frac{6}{2}$$

他方、 $|PQ| = 2$ より

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 4$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 \{ 1 + (x_1 + x_2)^2 \} = 4$$

$$\therefore \{ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \} \{ 1 + (x_1 + x_2)^2 \} = 4$$

①, ②を代入して整理すると

$$(26 - a^2)(1 + a^2) = 4$$

$$\therefore 6 = \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{4}{a^2 + 1} \right)$$

$$\therefore m = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{4}{a^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(a^2 + 1 + \frac{4}{a^2 + 1} - 1 \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(2\sqrt{(a^2 + 1) \cdot \frac{4}{a^2 + 1}} - 1 \right) = \frac{3}{4}$$

等号は、 $a = \pm 1$ のとき成立。

$$\therefore m \text{ の最小値は } \frac{3}{4} \quad \text{--- [答]}$$

2

(1) $z \neq \pm i$ のとき、

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2 - i^2} = \frac{2z}{z^2 + 1} \text{ が実数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{2\bar{z}}{\bar{z}^2 + 1} = \frac{2\bar{z}}{(\bar{z})^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow z \{ (\bar{z})^2 + 1 \} = \bar{z} (z^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} |z|^2 + z = z |z|^2 + \bar{z}$$

$$\therefore (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ または } |z| = 1$$

$$\Leftrightarrow z: \text{実数} \text{ または } |z| = 1$$

よって、 z が描く図形は

右図の太線部分になる。

$$(2) w = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow z = i \times \frac{w+1}{w-1}$$

よって、

(i) z : 実数、 a とする

$$\frac{w+1}{w-1} \text{ が純虚数}$$

$$\Leftrightarrow \frac{w+1}{w-1} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$$

$$= \frac{w+1}{w-1} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (w+1)(\bar{w}-1) + (w-1)(\bar{w}+1)$$

$$= 2(|w|^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow |w| = 1 \text{ (ただし、} w \neq 1 \text{)}$$

(ii) $|z| = 1$ のとき

$$\left| \frac{w+1}{w-1} \right| = \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |w+1|^2 = |w-1|^2$$

$$\Leftrightarrow (w+1)(\bar{w}+1) = (w-1)(\bar{w}-1)$$

$$\Leftrightarrow w + \bar{w} = 0 \Leftrightarrow w: \text{純虚数}$$

(i), (ii) より、 z は w 上で動くとき、

w は右図の太線部分を描く、

(ただし、 $z \neq -i$ のとき $w \neq 0$)



3

$$(1) V = \int_0^{\pi} \pi x^2 dy = \pi \int_0^{\pi} y dy = \frac{\pi}{2} \pi^2$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = \pi \pi \cdot \frac{d\pi}{dx} = \pi^2 x$$

$$\pi \pi \cdot \frac{d\pi}{dx} = -\sqrt{\pi} \Rightarrow \frac{d\pi}{dx} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}$$

$$(2) \frac{d\pi}{dx} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow \{f(x)\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d\pi}{dx} = -\frac{1}{\pi} \therefore$$

$$\frac{2}{3} \{f(x)\}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi} + C$$

$$\therefore z, f(0) = 1 \text{ より } \frac{2}{3} = C \text{ であり、}$$

$$\frac{2}{3} \{f(x)\}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(T) = 0 \text{ を満たす } T \text{ は}$$

$$\frac{2}{3} \times 0 = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

よって、

4

(1) n 回の移動中 n が奇数のとき n 回の移動が偶数であるとすれば、

$$X(n) = 1 \times k + (-1) \times (n-k) = 2k - n \text{ であり、}$$

$$\therefore X(8) = 2 \Leftrightarrow 2k - 8 = 2 \Leftrightarrow k = 5 \text{ であり、}$$

求める確率は、

$$2C_5 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{2C_5}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}$$

(2) $n = 7$ のとき、 $2k - 7$ ($k = 0, 1, \dots, 7$) のとり得る値を

考え、 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7$ であり、 $|X(7)|$ のとり得る値

は $1, 3, 5, 7$ の 4通りである。

$$|X(7)| = 1 \Leftrightarrow k = 3, k = 4$$

$$\therefore \text{確率は } \frac{2C_3 + 2C_4}{2^7} = \frac{2C_3}{2^6} = \frac{35}{64}$$

$$|X(7)| = 3 \Leftrightarrow k = 2, k = 5$$

$$\therefore \text{確率は } \frac{2C_2 + 2C_5}{2^7} = \frac{2C_2}{2^6} = \frac{21}{64}$$

$$|X(7)| = 5 \Leftrightarrow k = 1, k = 6$$

$$\therefore \text{確率は } \frac{2C_1 + 2C_6}{2^7} = \frac{2C_1}{2^6} = \frac{7}{64}$$

$$|X(7)| = 7 \Leftrightarrow k = 0, k = 7$$

$$\therefore \text{確率は } \frac{2C_0 + 2C_7}{2^7} = \frac{2C_0}{2^6} = \frac{1}{64}$$

よって、 $|X(7)|$ の期待値は

$$\frac{1 \times 35 + 3 \times 21 + 5 \times 7 + 7 \times 1}{64} = \frac{140}{64} = \frac{35}{16}$$

(3) 正方向にも負方向にも1ずつの移動が a であり、一度も 0 にもた

たらないのは、1回目の移動が $+1$ である場合、 $X > 0$ を保

たまま2回目~6回目まで移動を続けることである。

これを右の図で示せば、

条件を満たす移動の方法は

(0通りとわかる。それぞれ

についての確率は $\left(\frac{1}{2} \right)^6$ であり、

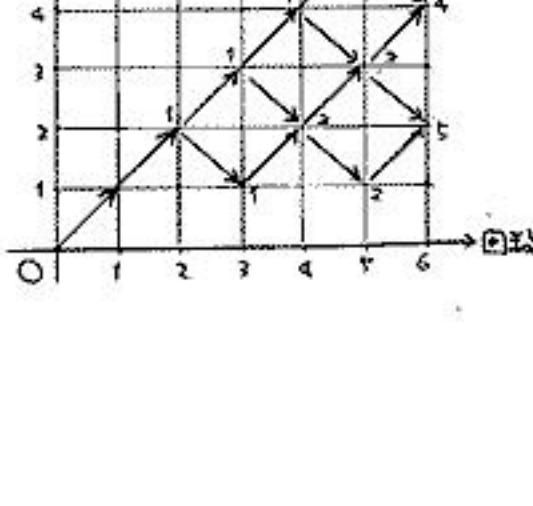
a であり、負方向への移動とあ

わせれば、求める確率は

$$2 \times \left\{ 10 \times \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right\}$$

$$= 2 \times \frac{10}{64} = \frac{5}{16}$$

とわかる。



5

(1) 半径 1 の円に内接する正六角形 $ABCDEF$ であり、

$AB = 1$ であり、初めに点 A は点 B を中心

に半径 $\sqrt{3}$ の円周上を中心角 $\frac{\pi}{3}$ だけ

回転される。次に A は点 C を中心に

半径 $\sqrt{3}$ の円周上を中心角 $\frac{\pi}{3}$ だけ

回転され、点 D 、点 E 、点 F と中心角 $\frac{\pi}{3}$ の回転を繰り返す。

$$L(6) = \frac{\pi}{3} (1 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 1) = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} \pi$$

(2) (1) の考察と同様に、正 n 角形の頂点を $A, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$

とすれば、

$$L(n) = \frac{2\pi}{n} \times \sum_{k=1}^{n-1} AB_k$$

$$\therefore \angle AOB_k = k \times \frac{2\pi}{n} \text{ であり、}$$

半径 1 の円に内接する n 角形であり、

$$AB_k^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{2k\pi}{n}$$

$$= 2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)$$

$$= 4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

$$\Rightarrow AB_k = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\therefore L(n) = \frac{2\pi}{n} \times \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$= 4 \times \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \quad (\because \sin 0 = 0)$$

よって、 $n \rightarrow \infty$ とすれば区積分法により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n) = 4 \times \int_0^{\pi} \sin x dx = 4 \times [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= 4(-\cos \pi + \cos 0) = 8$$

と求められる。

