

1 xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$, $B : y = -(x - a)^2 + b$ は異なる 2 点

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め図示せよ。

2 実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px + q)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^1 f'(x)(px + q)dx = 0$$

を満たす実数 p, q が存在するための a, b, c の条件と、そのときの p, q を求めよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

3

一辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。

$$PA = PB = PC = 2$$

とする。

- (1) 四面体 PABC の体積を求めよ。
- (2) 辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が

$$AE = AF, \cos \angle EPF = \frac{4}{5}$$

を満たすとき、長さ AE を求めよ。

4

点 P は数直線上を原点 O を出発点として、確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み、または負の向きに 1 進むとする。 n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

- (1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ。
- (2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ。
- (3) P が 6 回目の移動が終わった時点で、一度も O に戻っていない確率を求めよ。