

1

xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$, $B : y = -(x - a)^2 + b$ は異なる 2 点

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わるとする。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

(3) $|\overrightarrow{PQ}| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。

2

z を複素数とし, i を虚数単位とする。

(1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

3

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h ，体積を V とする。 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

- (1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

4

点 P は数直線上を原点 O を出発点として、確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み、または負の向きに 1 進むとする。 n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

- (1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ。
- (2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ。
- (3) P が 6 回目の移動が終わった時点で、一度も O に戻っていない確率を求めよ。

- 5 半径1の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて、正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし、再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

- (1) $L(6)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$ を求めよ。

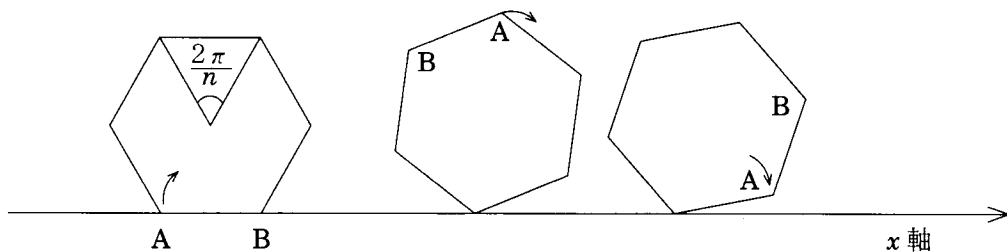


図 1

図は $n = 6$ の場合