

①

二項定理より,

$$\begin{aligned} x^8 &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k a^k (a^{-1})^{8-k} \\ &= \sum_{k=0}^8 {}_8C_k a^{2k-8} \end{aligned}$$

同様に,

$$y^8 = \sum_{k=0}^8 {}_8C_k (-1)^k a^{2k-8}$$

となるから,

$$\begin{aligned} x^8 - y^8 &= 2({}_8C_7 a^6 + {}_8C_5 a^2 + {}_8C_3 a^{-2} + {}_8C_1 a^{-6}) \\ &= 2\{8(a^6 + a^{-6}) + 56(a^2 + a^{-2})\} \end{aligned}$$

相加・相乗平均の関係より, $a^6 + a^{-6}$ と $a^2 + a^{-2}$ はともに $a=1>0$ のとき最小となり, その値はともに 2 であるから, $x^8 - y^8$ は $a=1$ のとき最小となり, その値は, $2(8 \cdot 2 + 56 \cdot 2) = 256$ … (答)

2

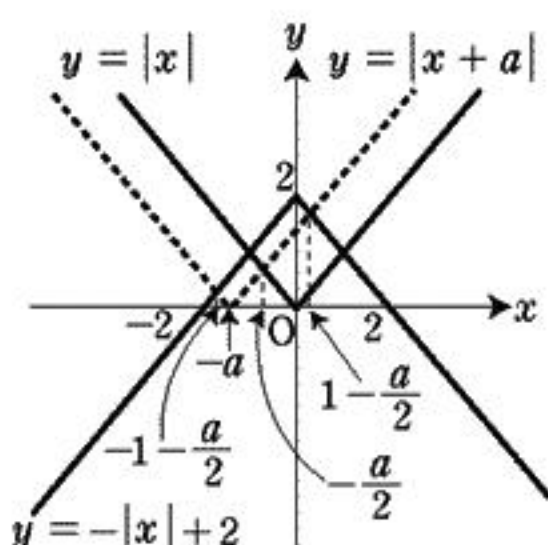
$$(1) \quad F'(x) = ||x+a|-1| - ||x|-1| \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } F'(x) = 0 &\iff ||x+a|-1| = ||x|-1| \\ &\iff |x+a|-1 = \pm(|x|-1) \end{aligned}$$

$$\iff |x+a| = |x| \text{ または } |x+a| = -|x| + 2$$

下図より,

$$\iff x = -\frac{a}{2} \text{ または } \begin{cases} \text{なし} & (a > 2) \\ -2 \leq x \leq 0 & (a = 2) \\ x = -1 - \frac{a}{2}, \quad 1 - \frac{a}{2} & (0 < a < 2) \end{cases}$$

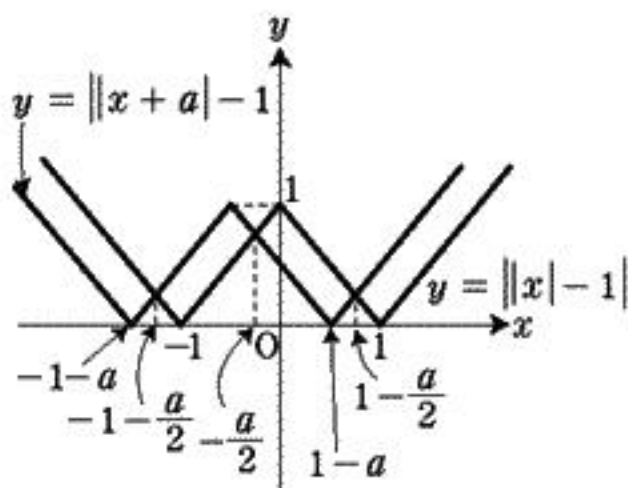


よって,

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{2} & (a > 2) \\ -2 \leq x \leq 0 & (a = 2) \\ x = -1 - \frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2}, \quad 1 - \frac{a}{2} & (0 < a < 2) \end{cases} \cdots \text{ (答)}$$

(2) $||x+a|-1|$ と $||x|-1|$ の大小を比較することにより, $F'(x)$ の値の正負がわかる。

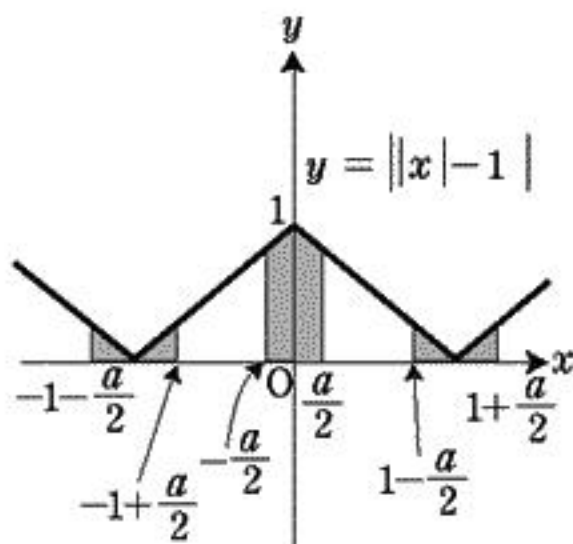
$0 < a < 2$ のとき, 右図により, 右下の増減表が得られる。極大値・極小値は, $y = ||x|-1|$ のグラフを利用すると,



$$\begin{aligned} \text{極大値: } F\left(-\frac{a}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \frac{a}{2}\right) \frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{4} a(4-a) \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{極小値: } F\left(-1 - \frac{a}{2}\right) &= F\left(1 - \frac{a}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{4} \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

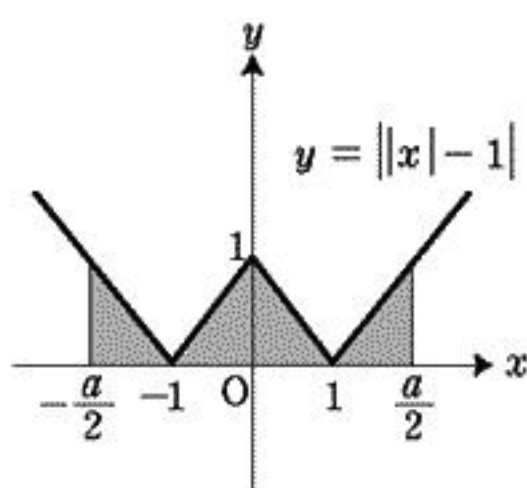
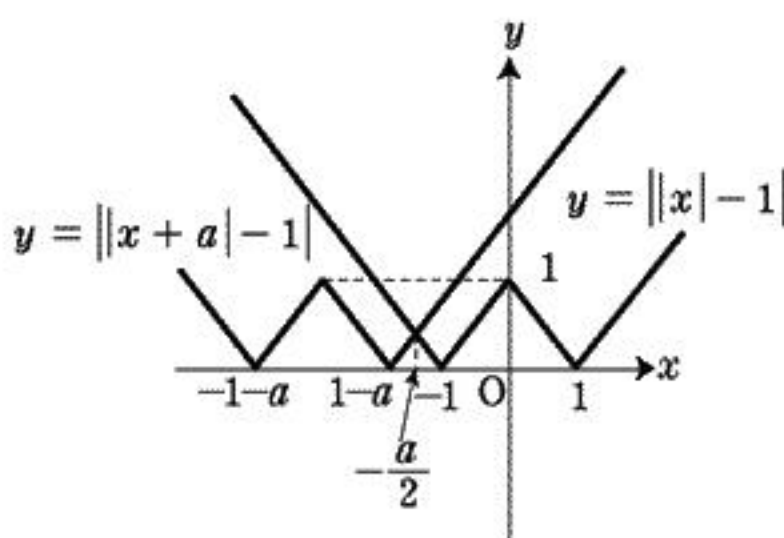
x	$\cdots$	$-1 - \frac{a}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$1 - \frac{a}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



(3) (2)と同様にして, 右下の増減表が得られるから, 極小値のみが存在し, その値は,

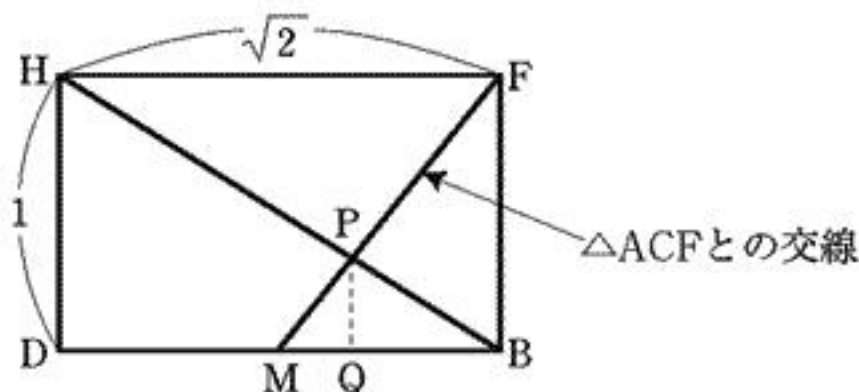
$$\begin{aligned} F\left(-\frac{a}{2}\right) &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{4} (a-2)^2 \quad \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$



3

(1)



点 M は線分 BD の中点だから、 $\triangle PMB$ と $\triangle PFH$ の相似比は 1 : 2 であり、

$$\begin{cases} BP = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\sqrt{1+2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ PQ = \frac{1}{3}DH = \frac{1}{3} \quad \dots(\text{答}) \end{cases}$$

(2) $BM = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $PM = \frac{1}{3}FM = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$
より、

$$BP^2 + PM^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = BM^2$$

が成り立つから $BP \perp FM$ となり、点 P は点 B から $\triangle ACF$ に下ろした垂線の足となる。

四面体 B-ACF の対称性から、点 P は $\triangle ACF$ の重心となり、内接球はこの重心で接するから、中心 O は線分 BP 上に存在する。
(証明終)

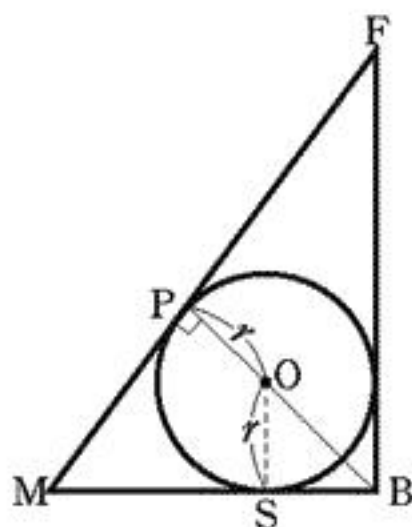
(3) 点 O から線分 BM に下ろした垂線の足を S とすると、

$\triangle HDB \sim \triangle OSB$ であるから、内接球の半径を r とすると、

$$OB = r \cdot \frac{HB}{HD} = \sqrt{3}r$$

よって、 $BP = OB + OP$ より、

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = (\sqrt{3} + 1)r \quad \therefore r = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \quad \dots (\text{答})$$



- (1) $\frac{1}{3}$ の確率で部屋を移り $\frac{2}{3}$ の確率で移らないから,

$$P_A(1) = \frac{2}{3}$$

$$P_B(1) = \frac{1}{3}$$

$$P_A(2) = \frac{2}{3} P_A(1) + \frac{1}{3} P_B(1) = \frac{5}{9}$$

$$P_B(2) = 1 - P_A(2) = \frac{4}{9}$$

$$P_A(3) = \frac{2}{3} P_A(2) + \frac{1}{3} P_B(2) = \frac{14}{27}$$

$$P_B(3) = 1 - P_A(3) = \frac{13}{27}$$

また, 持ち点の期待値は,

$$\begin{aligned} E(3) &= 1 + \sum_{k=1}^3 P_A(k) - \sum_{k=1}^3 P_B(k) \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27} \end{aligned}$$

- (2) (1)と同様に考えて

$$\begin{cases} P_A(n+1) = \frac{2}{3} P_A(n) + \frac{1}{3} P_B(n) \quad \cdots \textcircled{1} \\ P_B(n+1) = \frac{1}{3} P_A(n) + \frac{2}{3} P_B(n) \end{cases}$$

- (3) $P_A(n) + P_B(n) = 1$ であるから, ①は $P_A(n+1) = \frac{1}{3} P_A(n) + \frac{1}{3}$ となり,

$$P_A(n+1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(P_A(n) - \frac{1}{2} \right) \quad (n \geq 0)$$

$$\therefore P_A(n) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3^n} \left(P_A(0) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$$

よって,

$$\begin{cases} P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) \\ P_B(n) = 1 - P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \end{cases}$$