

1

$$(1) \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{ (答)}$$

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \frac{3+i\sqrt{3}}{2} + 1 = 1+i\sqrt{3} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) 定数項をもとの漸化式と比較すると,

$$\alpha - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha = 1 \quad \therefore \alpha - \frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{ (答)}$$

(3) (2)より $z_n - \alpha = (z_1 - \alpha)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ となるから $z_1=1$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$(4) \quad (3)より \quad z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \iff \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2} = -1$$

よって, 偏角について,

$$\frac{\pi}{3}(n-2) = -\pi + 2m\pi \quad \therefore n = 6m - 1 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad \dots \text{ (答)}$$

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} XA &= \begin{pmatrix} ax+cy & bx-ay \\ -cx+az & ax+bz \end{pmatrix} \\ AX &= \begin{pmatrix} ax+bz & -bx+ay \\ cx-az & ax+cy \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \cdots \textcircled{1}$$

であるから、 $k=0$ のとき、

$$(*) \iff bx=ay, \quad cy=bz, \quad az=cx$$

$c \neq 0$ だから、 x, y を z で表すことにより、

$$X = \begin{pmatrix} \frac{z}{c}a & \frac{z}{c}b \\ \frac{z}{c}c & -\frac{z}{c}a \end{pmatrix} = \frac{z}{c}A$$

よって、 $(*)$ をみたす X は A の実数倍である。(証明終)

(2) ①より、

$$\begin{aligned} (*) &\iff \begin{cases} cy-bz=ka & \cdots \textcircled{2} \\ 2(bx-ay)=kb & \cdots \textcircled{3} \\ 2(az-cx)=kc & \cdots \textcircled{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2(az-cx)=kc \\ cy-bz=ka \\ 2a(cy-bz)+2c(bx-ay)+2b(az-cx) \\ \quad = k(2a^2+bc+bc) & \cdots \textcircled{5} \end{cases} \\ &\quad \text{(ただし、⑤は } 2a \times \textcircled{2} + c \times \textcircled{3} + b \times \textcircled{4} \text{ である。)} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{az}{c} - \frac{k}{2} \\ y = \frac{bz+ka}{c} \\ 0 = k(a^2+bc) \end{cases} \end{aligned}$$

$k \neq 0$ のとき、 $a^2+bc=0$ が必要で、逆にこのとき、

$$x = \frac{at}{c} - \frac{k}{2}, \quad y = \frac{bt+ka}{c}, \quad z = t \quad (t \text{ は実数}) \quad \cdots \textcircled{6}$$

として X が存在する。よって、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$(*) \iff A^2=0 \quad (\text{証明終})$$

また、⑥で $t=c$ として、

$$X = \begin{pmatrix} a - \frac{k}{2} & b + \frac{ka}{c} \\ c & -\left(a - \frac{k}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \cdots (\text{答})$$

- (1) $f(x) = e^x - a(x + 2b)$ ($x \geq 0$) とすると,
 $f'(x) = e^x - a$ により, $f(x)$ の増減表は右
 のようになるから,

$$f(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

$$\iff f(\log a) \geq 0$$

$$\iff a(1 - \log a - 2b) \geq 0$$

$$a > 1 \text{ より, } 1 - \log a - 2b \geq 0 \quad \cdots \text{ (答)}$$

x	0	...	$\log a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ただし, $a=1$ のときは
 $\log a = 0$)

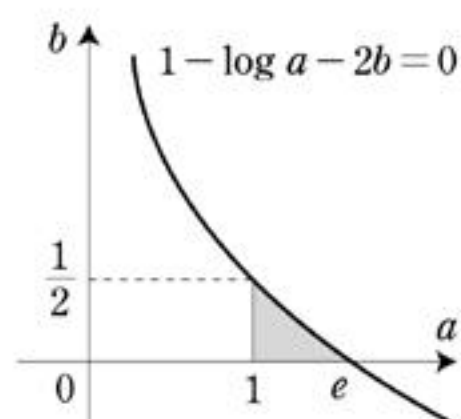
- (2) (1)より, a, b の動く範囲は右図の塗部分となり, さらに $\frac{1}{a}$ は
 a について単調減少だから,

与えられた定積分の値が最小になるとき

$1 - \log a - 2b = 0$ をみtas.

このとき, $a = e^{1-2b}$ となるから,

$$\begin{aligned} I(b) &= e^{b-1} \int_0^1 \frac{1}{x+2b} dx \\ &= e^{b-1} \{ \log(1+2b) - \log 2b \} \end{aligned}$$



(ただし, $b=0$ は含まない)

$$\left(0 < b \leq \frac{1}{2} \right)$$

の最小値を求めればよい。

$$I'(b) = e^{b-1} \left\{ \log(1+2b) - \log 2b + \frac{2}{1+2b} - \frac{2}{2b} \right\}$$

となるから, $g(x) = \log x + \frac{2}{x}$ ($0 < x \leq 2$) とすると,

$I'(b) = e^{b-1} \{ g(2b+1) - g(2b) \}$ と表せ,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2} \text{ より,}$$

$g(x)$ は $0 < x \leq 2$ で単調減少となるから,

$0 < 2b \leq 1, 1 < 1+2b \leq 2$ より, $I'(b) < 0$ となり,

$I(b)$ は $0 < b \leq \frac{1}{2}$ で単調減少。

よって, 与えられた定積分の値は $a=1, b=\frac{1}{2}$ のとき最小で,

$$\text{その値は } I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log 2}{\sqrt{e}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

第4問

- (1) $y = f_1(x) = x^3 - 3x$ ($f_1'(x) = 3(x+1)(x-1)$) のグラフと x 軸に平行な直線 $y = a$ との関係から、

$|a| < 2$ のとき 3 個, $|a| = 2$ のとき 2 個, $|a| > 2$ のとき 1 個

- (2) $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = a$ をみたす $f_1(x)$ の値は;

- (i) $|a| < 2$ のとき 3 個であり、

これらの $f_1(x)$ の値は互いに異なり、 $-2 < f_1(x) < 2$ にある。

よって、(1)の結果とあわせれば、

$f_2(x) = a$ をみたす x の値は、

$|a| < 2$ のとき 9 個

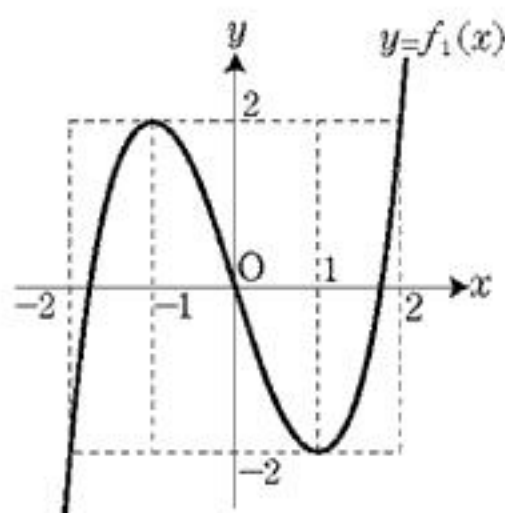
- (ii) $|a| = 2$ のときには、 $f_1(x) = 1, -2$ または $f_1(x) = -1, 2$ であって、これをみたす x の値は(1)の結果からそれぞれ 5 個存在する。

- (iii) $|a| > 2$ のときには $f_1(f_1(x)) = a$ をみたす $f_1(x)$ の値は、

$f_1(x) > 2$ または $f_1(x) < -2$ に 1 個だけ存在し、(1)の結果を再びあわせると $f_2(x) = a$ をみたす x の値は 1 個しか存在しない。

以上から、 $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数は、

$|a| < 2$ のとき 9 個, $|a| = 2$ のとき 5 個, $|a| > 2$ のとき 1 個



- (3) $f_n(x) = a$ をみたす実数 x の個数が、 $|a| < 2$ のとき 3^n 個であることを数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のときが(1), $n = 2$ のときが(2)である。

或る n での成立を仮定すれば、 $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ なので、 $f_{n+1}(x) = a$ をみたす $f_n(x)$ の値は、

$-2 < f_n(x) < 2$ に異なる 3 個

が存在する。この 3 個の値を右辺として $f_n = \dots$ を考えれば帰納法の仮定により、各々について 3^n 個ずつの x の値が対応する。よって、 $n + 1$ のときには $3 \times 3^n = 3^{n+1}$ (個) となる。

したがって、上の主張が示された。

$|a| < 2$ になる a として特に $a = 0$ を考えれば、

$f_n(x) = 0$ をみたす実数 x は 3^n 個である

が示された。

- (1) $\frac{1}{3}$ の確率で部屋を移り $\frac{2}{3}$ の確率で移らないから,

$$P_A(1) = \frac{2}{3}$$

$$P_B(1) = \frac{1}{3}$$

$$P_A(2) = \frac{2}{3} P_A(1) + \frac{1}{3} P_B(1) = \frac{5}{9}$$

$$P_B(2) = 1 - P_A(2) = \frac{4}{9}$$

$$P_A(3) = \frac{2}{3} P_A(2) + \frac{1}{3} P_B(2) = \frac{14}{27}$$

$$P_B(3) = 1 - P_A(3) = \frac{13}{27}$$

また, 持ち点の期待値は,

$$\begin{aligned} E(3) &= 1 + \sum_{k=1}^3 P_A(k) - \sum_{k=1}^3 P_B(k) \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27} \end{aligned}$$

- (2) (1)と同様に考えて

$$\begin{cases} P_A(n+1) = \frac{2}{3} P_A(n) + \frac{1}{3} P_B(n) \quad \cdots \textcircled{1} \\ P_B(n+1) = \frac{1}{3} P_A(n) + \frac{2}{3} P_B(n) \end{cases}$$

- (3) $P_A(n) + P_B(n) = 1$ であるから, ①は $P_A(n+1) = \frac{1}{3} P_A(n) + \frac{1}{3}$ となり,

$$P_A(n+1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(P_A(n) - \frac{1}{2} \right) \quad (n \geq 0)$$

$$\therefore P_A(n) - \frac{1}{2} = \frac{1}{3^n} \left(P_A(0) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{3^n}$$

よって,

$$\begin{cases} P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) \\ P_B(n) = 1 - P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \end{cases}$$

- (4) $E(n) = 1 + \sum_{k=1}^n P_A(k) - \sum_{k=1}^n P_B(k)$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3^n} \right)$$