

(1) 判別式を考慮して

$$4k^2 - 4(-3k^2 + 1) = 4(2k-1)(2k+1) < 0,$$

すなわち $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ が必要とする k の範囲.

$$\begin{aligned} (2) \quad F(k) &= \int_0^k (x^2 - 2kx - 3k^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - kx^2 - (3k^2 - 1)x \right]_0^k \\ &= -\frac{11}{3}k^3 + k \quad \text{となる} \end{aligned}$$

$$\frac{dF}{dk}(k) = -11k^2 + 1 \quad \text{となり}$$

$F(k)$ の増減表は下記通り

k	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{11}}$		$\frac{1}{\sqrt{11}}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{dF}{dk}$		-	0	+	0	-	
F	$-\frac{1}{24}$		$-\frac{2\sqrt{11}}{33}$		$\frac{2\sqrt{11}}{33}$		$\frac{1}{24}$

よって $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ が必要とする

$$F(k) \text{ の最大値は } F\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{33},$$

$$\text{最小値は } F\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = -\frac{2\sqrt{11}}{33} \quad \text{となる.}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 + ak + b) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + a \cdot \frac{n(n+1)}{2} + bn \right) \\ &= \frac{1}{3}n^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)n + \frac{1}{6} + \frac{a}{2} + b\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}f(n) = \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}an + \frac{1}{3}b$$

すべての自然数 n に対し、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{3}f(n)$ が成立するには、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{1}{3}f(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a\right)n + \frac{1}{6} + \frac{a}{2} + \frac{2}{3}b = 0 \text{ か}$$

すべての自然数 n で成立すればよい。

$$\text{これには } \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a = 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{a}{2} + \frac{2}{3}b = 0 \end{cases} \text{ が必要.}$$

$$\text{よって } \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\text{答 } f(x) = x^2 - 3x + 2}$$

(1) $X=4$ であるとき、記録した色は、
赤・青・黄・緑の順列となる。

つまり $4! = 24$ 通り。

試行の総数は $4^4 = 256$ 通りなので、

$$P_4 = \frac{24}{256} = \frac{3}{32} \quad \text{となる。}$$

$X=3$ であるとき、記録した色も A, B, C とし、
 A が 2 回記録したことになる。

このとき、 $X=3$ となる試行の総数は

$$A, A, B, C \text{ の順列なので } \frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{ 通り。}$$

つまり A, B, C の選び方は、

A が 4 通り。

B, C は残りの三色から二色を選ぶの
だが、 B, C を区別する必要がないので、
 ${}_3C_2 = 3$ 通り。

つまり $4 \times 3 = 12$ 通りとなる。

また $X=2$ となる試行は $12 \times 12 = 144$ 通り。

$$\text{よって } P_3 = \frac{144}{256} = \frac{9}{16} \quad \text{となる。}$$

(2) $X=1$ となる試行は記録した色の選び方から
4 通り。

$$\text{つまり } P_1 = \frac{4}{256} = \frac{1}{64} \quad \text{となる。}$$

$$\text{また } P_2 = 1 - P_1 - P_3 - P_4 \quad \text{より}$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{64} - \frac{9}{16} - \frac{3}{32} = \frac{21}{64}$$

$$\text{よって } E = 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3 + 4 \times P_4$$

$$= \frac{1}{64} + 2 \cdot \frac{21}{64} + 3 \cdot \frac{9}{16} + 4 \cdot \frac{3}{32}$$

$$= \frac{175}{64} \quad \text{となる。}$$

題意の正四面体を $ABCD$ 、球の中心を O とす。

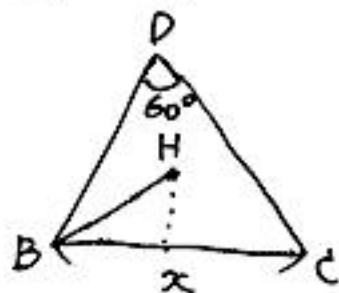
対称性から 直線 AO は平面 BCD に直交する。

AO と BCD の交点を H とす。

求める辺の長さを x とおく。

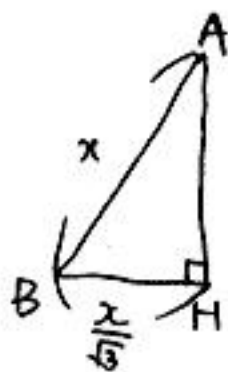
AH に関する対称性から H は $\triangle BCD$ の外心なので

$$BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ となる。}$$



$\triangle ABH$ において 三平方の定理から

$$AH = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x \text{ であり、}$$



OH の長さは A, O, H の順に開く。

$$|AH - AO| = \left| \frac{\sqrt{6}}{3}x - 1 \right| \text{ と書けるので。}$$

$\triangle OBH$ において

$$1^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left|\frac{\sqrt{6}}{3}x - 1\right|^2$$

が成り立つ。

つまり $x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}x = 0$ であり、 $x \neq 0$ なので

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{6} \text{ が求まる。}$$

