

$$(1) (e^a)^2 - 2e^a - 1 = 0 \text{ となり } e^a = 1 \pm \sqrt{2}.$$

$$e^a > 0 \text{ となり } e^a = 1 + \sqrt{2} \text{ となり } a = \log(1 + \sqrt{2}).$$

$$(2) X = e^x \text{ とおくと } dX = e^x dx \text{ となる}$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^x + e^{2t}} dx = \int_1^{e^t} \frac{1}{X + e^{2t}} dX$$

$$= [\log |X + e^{2t}|]_1^{e^t}$$

$$= \log(e^{2t} + e^t) - \log(e^{2t} + 1)$$

$$= \log \frac{e^{2t} + e^t}{e^{2t} + 1} \text{ となる.}$$

$$(3) \frac{dF}{dt}(t) = \left(\frac{e^{2t} + e^t}{e^{2t} + 1} \right)^{-1} \cdot \frac{(2e^{2t} + e^t)(e^{2t} + 1) - (e^{2t} + e^t) \cdot 2e^{2t}}{(e^{2t} + 1)^2}$$

$$= - \frac{e^t}{(e^{2t} + e^t)(e^{2t} + 1)} (e^{2t} - 2e^t - 1) \quad \text{となる}$$

$$- \frac{e^t}{(e^{2t} + e^t)(e^{2t} + 1)} < 0 \text{ となる } F(t) \text{ の増減表は}$$

t	0	$\log(1 + \sqrt{2})$	
$\frac{dF}{dt}$	+	0	-
F	$\nearrow$		$\searrow$

となり $F(t)$ は

$$t = \log(1 + \sqrt{2}) \text{ での最大値 } \log \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} = \log \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

となる.

$$(1) C_{n+1} = a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a_{n+1} \ b_{n+1}) \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= (a_n \ b_n) \begin{pmatrix} \cos x + \cos y & -\sin x + \sin y \\ \sin x - \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \cos x + \cos y & \sin x - \sin y \\ -\sin x + \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_n \ b_n) \begin{pmatrix} 2+2\cos(x+y) & 0 \\ 0 & 2+2\cos(x+y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= 2(1 + \cos(x+y))(a_n^2 + b_n^2)$$

$$= 2(1 + \cos(x+y)) C_n \quad \text{と仮定する。}$$

$\{C_n\}$ は等比数列. $C_1 = a_1^2 + b_1^2 = 1$ より

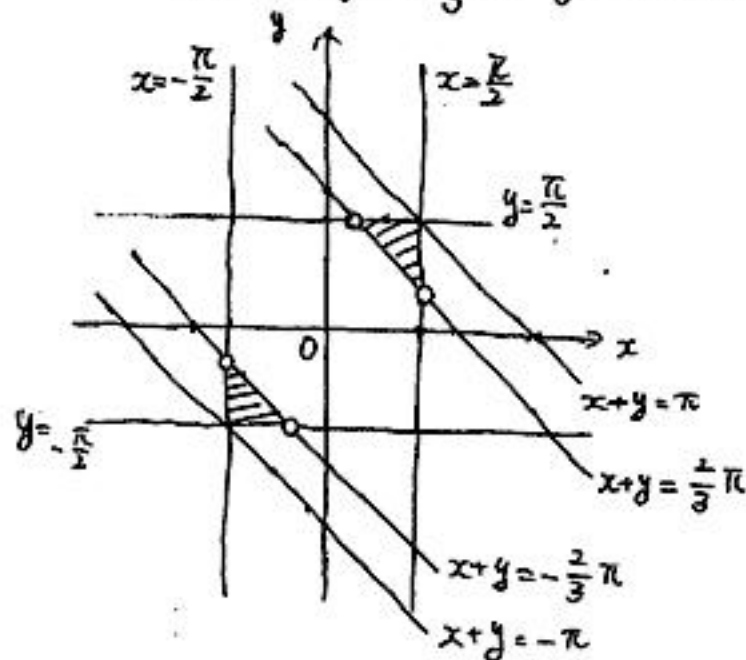
$$C_n = 2^{n-1} (1 + \cos(x+y))^{n-1} \quad \text{と仮定する。}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0 \iff |2(1 + \cos(x+y))| < 1$$

$$\iff -\frac{3}{2} < \cos(x+y) < -\frac{1}{2} \quad \text{と仮定する。}$$

$$-\pi \leq x+y \leq \pi \quad \text{より} \quad \text{これは}$$

$$-\pi \leq x+y < -\frac{2}{3}\pi, \quad \frac{2}{3}\pi < x+y \leq \pi \quad \text{との} \quad 2^n.$$



左図の
斜線部
($x+y = \pm \frac{2}{3}\pi$ は除く)
が求める答。

$$(1) \quad k-1 \leq t \leq k \Rightarrow t^m \leq k^m \leq (t+1)^m \quad t^m$$

自然数 m に対しても成立する.

$$\text{よって} \quad \int_{k-1}^k t^m dt \leq \int_{k-1}^k k^m dt = k^m \leq \int_{k-1}^k (t+1)^m dt.$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^n t^m dt &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k t^m dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (t+1)^m dt \\ &= \int_0^n (t+1)^m dt. \end{aligned}$$

と成る.

$$(2) \quad f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_0 \quad \text{と成る.}$$

$$(1) \text{より} \quad \frac{n^{m+1}}{m+1} \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} \quad \text{と成る.}$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n k^r + a_{r-1} \sum_{k=1}^n k^{r-1} + \dots + a_0 \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{と成る.}$$

$$\begin{aligned} &\frac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{n^r}{r} + \dots + a_1 \frac{n^2}{2} + a_0 \cdot n \\ &\leq \sum_{k=1}^n f(k) \\ &\leq \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{(n+1)^r}{r} + \dots + a_1 \frac{(n+1)^2}{2} + a_0 \cdot n \end{aligned}$$

と成る.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{r+1}} \left(\frac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{n^r}{r} + \dots + a_1 \frac{n^2}{2} + a_0 n \right) \\ &= \frac{1}{r+1} + a_{r-1} \frac{1}{r n} + \dots + a_1 \frac{1}{2 n^{r-1}} + a_0 \frac{1}{n^r} \\ &\longrightarrow \frac{1}{r+1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{と成る.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{r+1}} \left(\frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{(n+1)^r}{r} + \dots + a_1 \frac{(n+1)^2}{2} + a_0 n \right) \\ &= \frac{1}{r+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{r+1} + \frac{a_{r-1}}{r n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^r + \dots + \frac{1}{2 n^{r-1}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{a_0}{n^r} \\ &\longrightarrow \frac{1}{r+1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{と成る.} \end{aligned}$$

$$\text{はさみうちの原理より} \quad \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) \longrightarrow \frac{1}{r+1} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{と成る.}$$

$$(3) \quad r \text{ は } f(x) \text{ の次数と成る} \quad (2) \text{より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} \cdot \frac{1}{2} f(n) = \frac{1}{r+1}.$$

$$\frac{f(n)}{n^r} = 1 + a_{r-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^r} \quad \text{と成る.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^r} = 1. \quad \text{よって} \quad \frac{1}{r+1} = \frac{1}{2} \quad \text{と成る}$$

$$r=1, \quad \text{よって } f(x) \text{ は一次式と成る. } x+a \quad \text{と成る.}$$

$$\text{このとき} \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n (k+a) = \frac{n(n+1)}{2} + an = \frac{n(n+2a+1)}{2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{2} f(n) = \frac{1}{2} (n+a).$$

$$\text{よって恒等的に等しいことから} \quad a=-1.$$

$$\text{つまり} \quad f(x) = x-1 \quad \text{と成る.}$$

$$(1) \quad a_2 = \frac{a_1}{2a_1 - 3} = \frac{1+i}{2(1+i)-3} = \frac{1-3i}{5} \quad \text{である.}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{である}$$

$$(0,0), (1,1), \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right) \text{ を通ると}$$

である,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 \\ (1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ \left(\frac{1}{5}-a\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}-b\right)^2 = r^2 \end{cases} \quad \text{であるので} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$\text{すなわち } (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{複素平面上では } |z-1| = 1 \quad \text{である.}$$

$$(2) \quad |a_{n+1}-1|^2 = \left| \frac{a_n}{2a_n-3} - 1 \right|^2$$

$$= \left| \frac{-a_n+3}{2a_n-3} \right|^2$$

$$= \frac{|-a_n+3|^2}{|2a_n-3|^2} \quad \text{である}$$

$$|-a_n+3|^2 - |2a_n-3|^2 = -3a_n\bar{a}_n + 3a_n + 3\bar{a}_n$$

$$= -3\{(a_n-1)(\bar{a}_n-1)-1\}$$

$$= -3\{|a_n-1|^2 - 1\} \quad \text{である}$$

$$|a_n-1|^2 = 1 \quad \text{であるならば} \quad |-a_n+3|^2 - |2a_n-3|^2 = 0$$

$$\text{すなわち } |a_{n+1}-1|^2 = \frac{|-a_n+3|^2}{|2a_n-3|^2} = 1 \quad \text{である.}$$

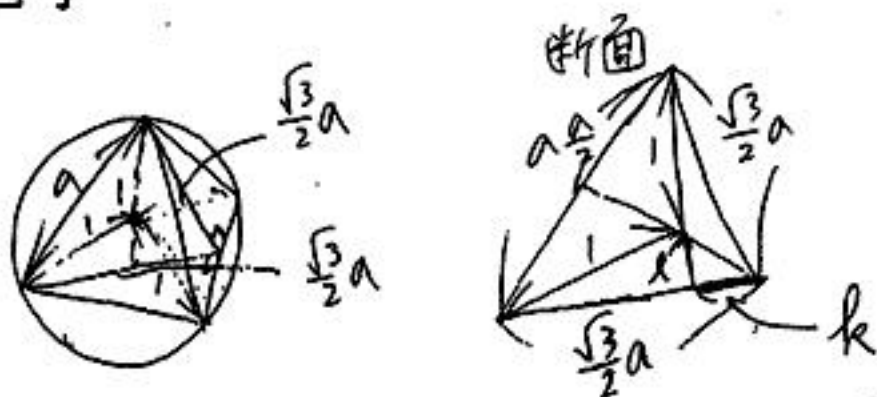
$$(1) \text{ より } |a_1-1|^2 = 1 \quad \text{なので}$$

数学的帰納法により

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対し } |a_n-1|^2 = 1$$

つまり 題意は成立.

[5]



上図太線の長さを k とおくと、 $a^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2}a - k)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 - k^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}ak = \frac{3}{4}a^2 - a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{6}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

×ネラウスの定理より $\frac{1}{1} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$$\therefore l = \frac{1}{3}$$

三平方の定理より $(\frac{4}{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2$

$$\therefore \frac{16}{9} + \frac{1}{12}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\therefore a^2 = \frac{16}{9} \times \frac{12}{8} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$