

(1) $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ と仮定すると、解と係数の関係より、 $c = \alpha\beta = 0$ となるが、条件より c は 0 ではないので矛盾。

よって、 α と β はともに 0 ではない。

(2)

(i) $\frac{\alpha}{\beta} = r$ のとき

$\alpha = \beta r$ であることと、解と係数の関係とから次式を得る。

$$\begin{cases} \beta(r+1) = -b \cdots ① \\ \beta^2 r = c \cdots ② \end{cases}$$

(1) より $c, r \neq 0$ なので、②から $\beta^2 = \frac{c}{r} \cdots ③$

①の両辺を 2 乗すると、 $\beta^2(r+1)^2 = b^2$ が得られ、

$r \neq -1$ のとき、 $\beta^2 = \frac{b^2}{(r+1)^2} \cdots ④$ となる。

よって③ ④より、 $b^2 = \frac{c(r+1)^2}{r} \cdots ⑤$ を得る。

$r = -1$ のとき、 β に関わらず $b = 0$ となるので、同様に⑤が成立。

(ii) $\frac{\beta}{\alpha} = r$ のとき

上の議論で β と α を入れ替えれば同様の関係式が成立する。

したがって求める関係式は $b^2 = \frac{c(r+1)^2}{r}$

(1)

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}|^2 \\
 &= (2\cos t + \sin 3t)^2 + (2\sin t - \cos 3t)^2 + 2^2 \\
 &= 9 + 4(\cos t \sin 3t - \sin t \cos 3t) \\
 &= 9 + 4\sin 2t
 \end{aligned}$$

であるので、これが $-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$ で最小になるのは、 $\sin 2t = -1$ のとき、すなわち、 $t = -45^\circ, 135^\circ$ のときであり、そのときの P の座標は、

$$\begin{cases} t = -45^\circ \text{ のとき } P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1) \\ t = 135^\circ \text{ のとき } P(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1) \end{cases}$$

である。

(2) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0 度以上 90 度以下になるのは、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq 0$ となることと同値である。従って、

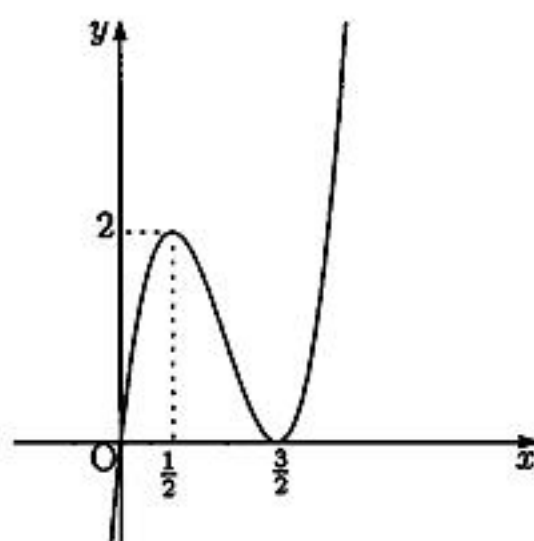
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= -2\cos t \sin 3t + 2\sin t \cos 3t - 1 \\
 &= -2\sin 2t - 1
 \end{aligned}$$

であるから、 $\sin 2t \leq -\frac{1}{2}$ を得る。これを満たすような t の範囲は、 $210^\circ \leq 2t \leq 330^\circ$, $-150^\circ \leq 2t \leq -30^\circ$ より、 $105^\circ \leq t \leq 165^\circ$, $-75^\circ \leq t \leq -15^\circ$ である。

(1) $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$ であるから、 $f'(x) = 0$ と $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ が同値になる。よって、増減表は以下ようになる。

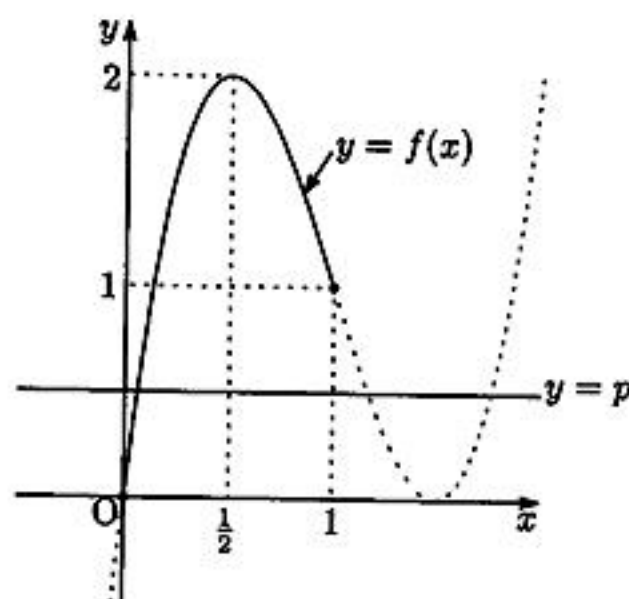
x	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

従って、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で極大値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ をとり、 $x = \frac{3}{2}$ で極小値 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ を取る。よって、グラフは図の通りになる。



(2) $y = f(x)$ と直線 $y = p$ との交点の x 座標が与えられた 3 次方程式の実数解を与えるので、 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分と $y = p$ との交点の個数が 1 となるような p の条件を求めればよい。

よって、図より、 $0 \leq p < 1$ または $p = 2$ である。



(1) 出た目を順に (x, y, z) ($1 \leq x, y, z \leq 6$) とおくと、ちょうど 3 回めで終了するのは、 $y = z$ かつ $x \neq y$ のときである。従って、求める確率は、

$$\frac{6 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{36}$$

である。

(2) 3 回目以内で終了する事象は、3 回目以内で終了しない事象の余事象である。3 回目以内で終了しないのは $x \neq y$ かつ $y \neq z$ のときである。従って、求める確率は、

$$1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{6^3} = \frac{11}{36}$$

である。

(3) r 回目以内で終了する確率を P_r とおくと、求める確率は、 $P_r - P_{r-1}$ である。 r 回目以内で終了する事象は、 r 回目以内で終了しない事象の余事象である。 r 回目までに出了目を $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ とすると、 r 回目以内で終了しないのは $x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, \dots, x_{r-1} \neq x_r$ のときである。従って、

$$P_r = 1 - \frac{6 \cdot 5^{r-1}}{6^r} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$$

である。従って、求める確率は、

$$P_r - P_{r-1} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{r-2}$$

である。