

①

(1) x, y, z が実数のとき、

$$x \leq y \leq z \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$4x + 3y + 2z = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、①、②から z を消去すると、②から

$$z = \frac{1 - (4x + 3y)}{2}$$

なので、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow x \leq y \leq \frac{1 - (4x + 3y)}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq y \quad \text{かつ} \quad 4x + 5y \leq 1 \quad \text{かつ} \quad -1 \leq 4x + 3y$$

となり、これを満たす点 (x, y) の存在範囲を xy 平面上に図示すると右上図の斜線部分(境界を含む)となる。

よって x の最大値は $x = \frac{1}{9}$ $\left[y = \frac{1}{9}, z = \frac{1}{9} \text{ のとき} \right]$ …答

y の最小値は $y = -\frac{1}{7}$ $\left[x = -\frac{1}{7}, z = 1 \text{ のとき} \right]$ …答

$$(2) \quad 3x - y + z = 3x - y + \frac{1 - (4x + 3y)}{2}$$

$$= x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}$$

から、

$$x - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2} = k$$

とおく。これは

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}k$$

となり、 xy 平面において傾き $\frac{2}{5}$ の直線を表す。

この直線と(1)で描いた領域とが交点をもつ範囲における k の範囲を調べればよい。

すると右図のように

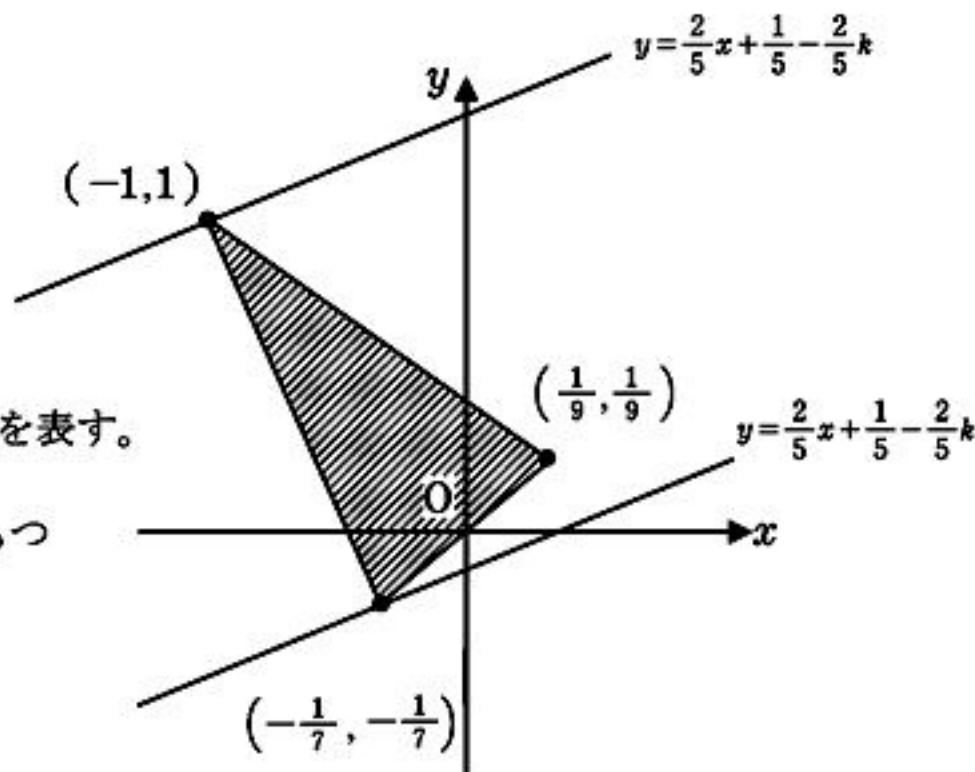
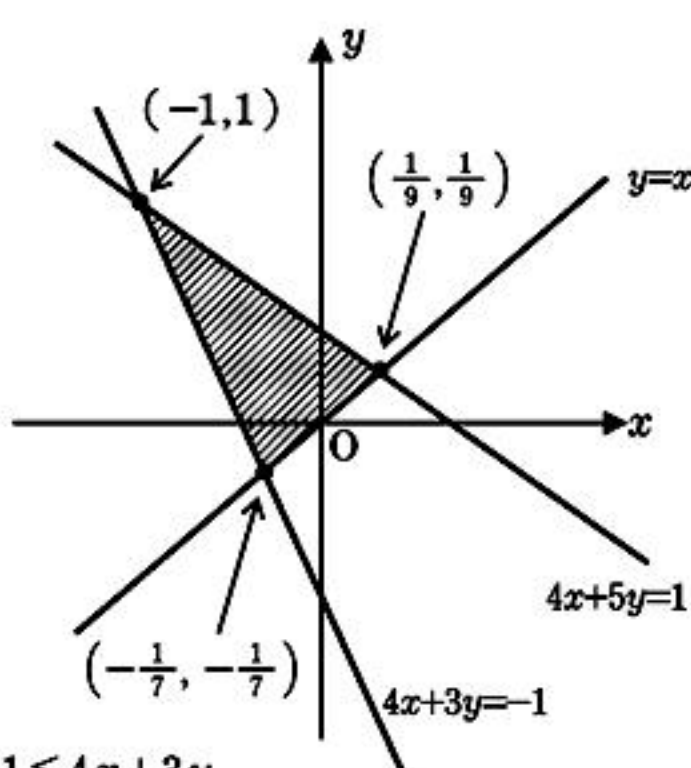
点 $(-1, 1)$ を通るとき

点 $\left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)$ を通るとき

の k の値がそれぞれ $k = -3$, $k = \frac{5}{7}$ となるので、

求める $3x - y + z$ の値の範囲は、

$$-3 \leq 3x - y + z \leq \frac{5}{7} \quad \cdots \text{答}$$



②

$A_0(1,0,0)$, $A_1(1,1,0)$, $A_2(1,0,1)$, $B_0(2,0,0)$, $B_1(2,1,0)$, $B_2(\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

について、

(1) 設定により

$$(k,l,m)=k(1,0,0)+l(0,1,0)+m(0,0,1)$$

$$=k\vec{e}_1+l\vec{e}_2+m\vec{e}_3$$

と書けるので、

$$\vec{OA_0}=(1,0,0)=\vec{e}_1 \quad \dots \text{答}$$

$$\vec{OA_1}=(1,1,0)=\vec{e}_1+\vec{e}_2, \quad \vec{OA_2}=(1,0,1)=\vec{e}_1+\vec{e}_3 \quad \text{と書けることから}$$

$$\vec{A_0A_1}=\vec{OA_1}-\vec{OA_0}=\vec{e}_2 \quad \dots \text{答}$$

$$\vec{A_0A_2}=\vec{OA_2}-\vec{OA_0}=\vec{e}_3 \quad \dots \text{答}$$

$$\vec{OB_0}=(2,0,0)=2\vec{e}_1 \quad \dots \text{答}$$

$$\vec{OB_1}=(2,1,0)=2\vec{e}_1+\vec{e}_2, \quad \vec{OB_2}=(\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_3 \quad \text{と書けることから}$$

$$\vec{B_0B_1}=\vec{OB_1}-\vec{OB_0}=\vec{e}_2 \quad \dots \text{答}$$

$$\vec{B_0B_2}=\vec{OB_2}-\vec{OB_0}=\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_3 \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad \vec{OP}=\vec{OA_0}+a\vec{A_0A_1}+b\vec{A_0A_2}$$

$$\vec{OP'}=\vec{OB_0}+p\vec{B_0B_1}+q\vec{B_0B_2}$$

について、(1)の結果より

$$\vec{OP}=\vec{e}_1+a\vec{e}_2+b\vec{e}_3$$

$$\vec{OP'}=2\vec{e}_1+p\vec{e}_2+q\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_3\right)$$

$$=\left(2+\frac{1}{2}q\right)\vec{e}_1+p\vec{e}_2+\frac{\sqrt{3}}{2}q\vec{e}_3$$

と書ける。また3点O, P, P'は同一直線上にあることから0でない実数kが存在し

$$\vec{OP'}=k\vec{OP}$$

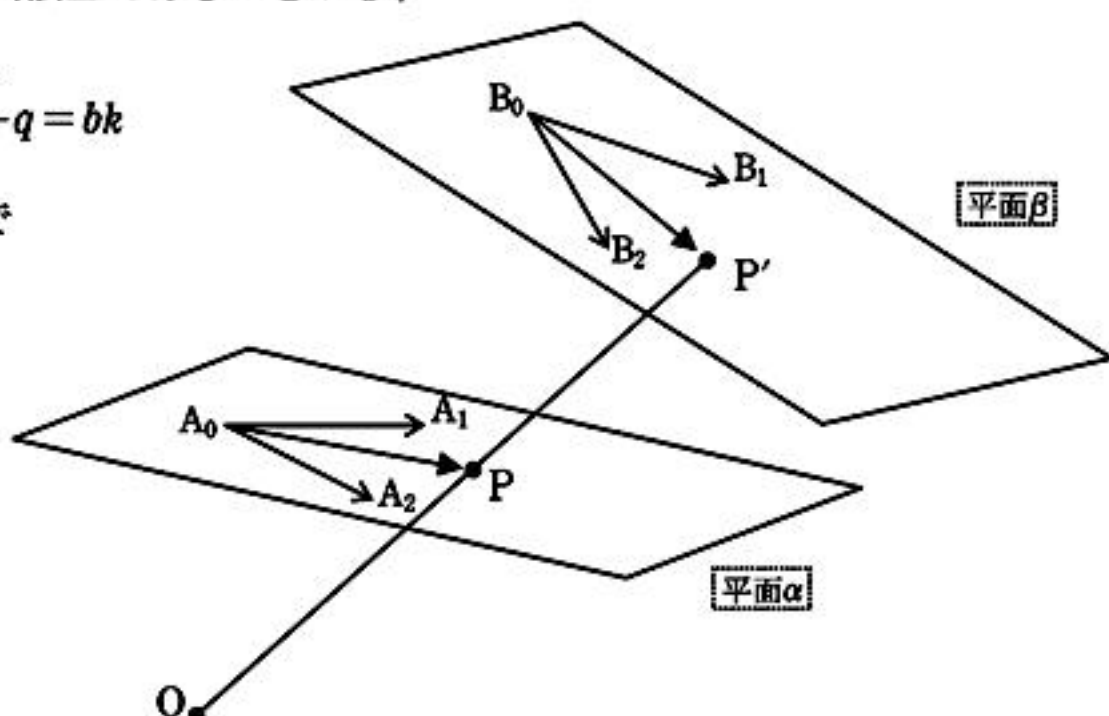
と書け、さらに $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は一次独立であることから、

$$2+\frac{1}{2}q=k, \quad p=ak, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}q=bk$$

が成立し、kを消去することで

$$a=\frac{p}{2+\frac{q}{2}}=\frac{2p}{4+q} \quad \dots \text{答}$$

$$b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}q}{2+\frac{q}{2}}=\frac{\sqrt{3}q}{4+q} \quad \dots \text{答}$$



(3) 点Pが α 上の点 A_0 を中心とする半径1の円Cの周上にあるとき、

$$|\vec{A_0P}|=1 \Leftrightarrow |\vec{OP}-\vec{OA_0}|=1$$

が成立し、(1), (2)から

$$|\vec{e}_1+a\vec{e}_2+b\vec{e}_3-\vec{e}_1|=1$$

$$\Leftrightarrow |a\vec{e}_2+b\vec{e}_3|=1$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 2p^2+q^2-4q-8=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1 \quad \dots \ast$$

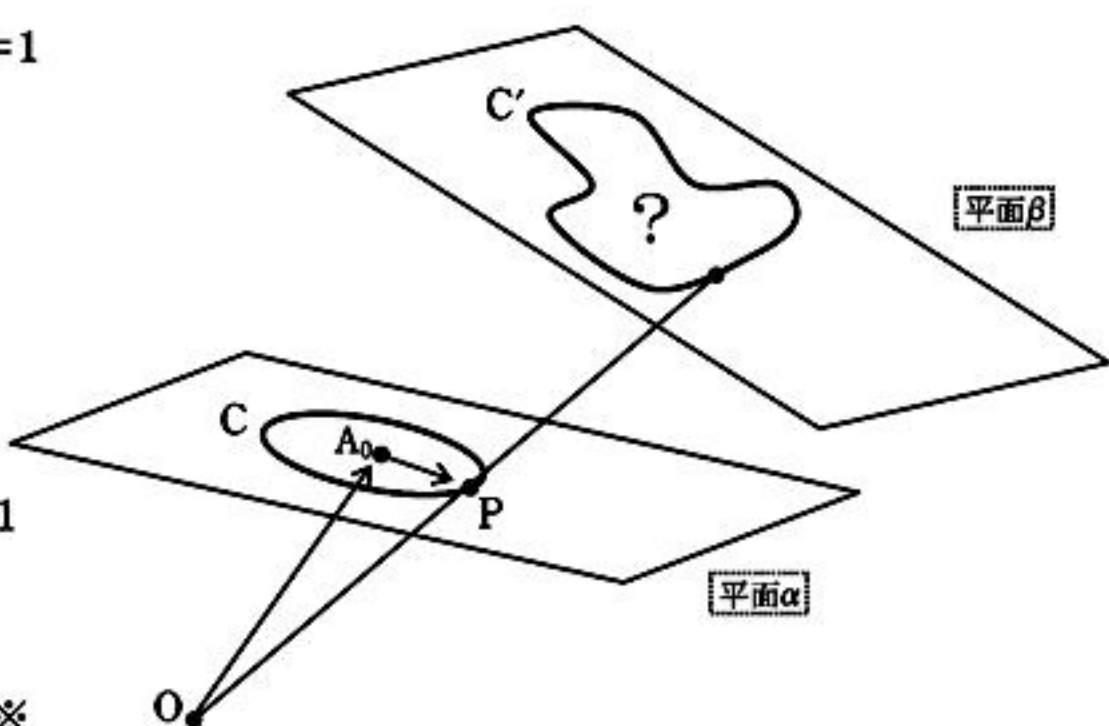
となり、これはpq平面上で楕円を表す方程式である。

また、 $\vec{OP'}=\vec{OB_0}+p\vec{B_0B_1}+q\vec{B_0B_2}$ から点P'は平面 β 上において B_0 を中心とし、直交する2つの単位ベクトル $\vec{B_0B_1}$, $\vec{B_0B_2}$ を軸の単位方向ベクトルとして作られた座標系で点 (p,q) に対応するので、 $\ast$ からC'は楕円である。…証明終了

※普段使っているxy平面は、 $(0,0)$ を原点として

$$\vec{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2, \quad \vec{e}_1=(1,0), \quad \vec{e}_2=(0,1)$$

の形で設定できる。 $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0)$ なので直交座標



③

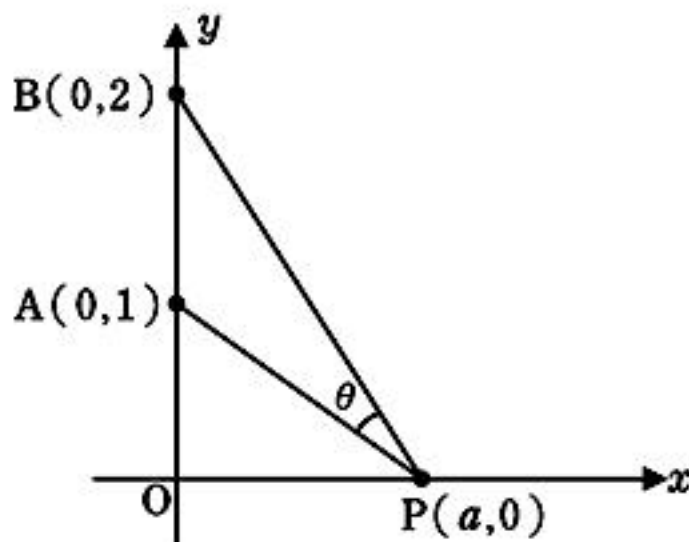
(1) 図において、

$\vec{PA} = (-a, 1)$, $\vec{PB} = (-a, 2)$ であり、
 $\angle APB = \theta$ から内積の定義により

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| |\vec{PB}| \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 = \sqrt{a^2 + 1} \sqrt{a^2 + 4} \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1} \sqrt{a^2 + 4}} \quad \dots \text{答}$$



(2) 右のグラフより、

$\angle APO = \alpha$, $\angle BPO = \beta$ とおくと、

$\tan \alpha = \frac{1}{a}$, $\tan \beta = \frac{2}{a}$ であり、

$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a}}{1 + \frac{2}{a} \times \frac{1}{a}}$$

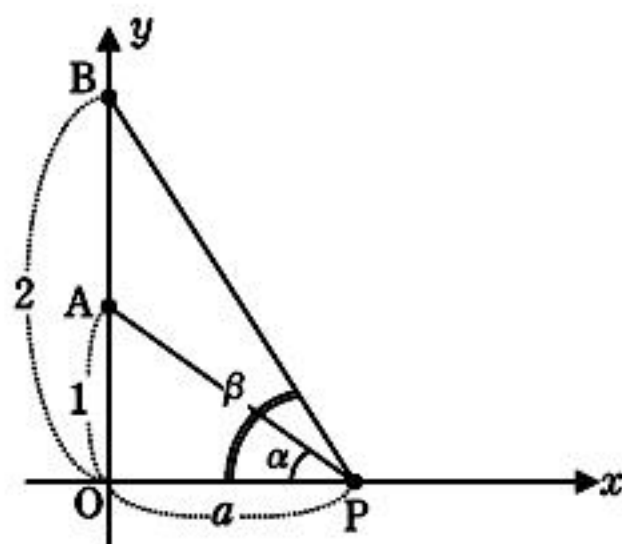
$$= \frac{1}{a + \frac{2}{a}}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{a \times \frac{2}{a}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (a > 0 \text{ から相加平均・相乗平均の関係を利用})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



となり、等号の成立は $a = \frac{2}{a}$ から $a = \sqrt{2}$ ($a > 0$ より) のとき。

今、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、この区間で $\tan \theta$ は単調増加なので $a = \sqrt{2}$ のとき

θ は最大となる。従って θ が最大となるのは $a = \sqrt{2}$ のときである。

…答

※もちろん(1)の結果を利用して $\cos \theta$ が最小(区間内で減少関数なので)となる a の値を
 考えてもよいが、図形的に $\tan$ が捉えやすいのでこちらの解法とした。
 (1)に関しても(2)のように $\tan \theta$ を出してから $\cos \theta$ に変換しても出せる。

4

(1) m, n が整数, $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$ について、

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \}$$
 の変形から、

$m=n=0$ のとき、

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \quad \cdots \text{答}$$

$m=\pm n, n \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos(\pm n + n)x + \cos(\pm n - n)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2nx + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} \sin 2nx + x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n} \times 0 + 2\pi \right) \\ &= \pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$m \neq \pm n$ のとき、

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+n} \times 0 + \frac{1}{m-n} \times 0 - \frac{1}{m+n} \times 0 - \frac{1}{m-n} \times 0 \right) \\ &= 0 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sqrt{1} \cos x + \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{3} \cos 3x + \cdots + \sqrt{n} \cos nx)^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n k \cos^2 kx + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\sqrt{ij} \cos ix \cos jx \right) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n k \cos^2 kx \right) dx \quad \left[(1) \text{の結果から } i \neq j \text{ のとき } \int_0^{2\pi} \cos ix \cos jx dx = 0 \text{ より} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n k\pi \quad \left[(1) \text{の結果から } \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi \text{ より} \right]$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)\pi \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成立する}) \quad \cdots \text{答}$$

⑤

(1) 4回目以内に終了するのは、

$$2\text{回目で終了するとき、確率は}\frac{6 \times 1}{6^2} = \frac{36}{6^3}$$

$$3\text{回目で終了するとき、確率は}\frac{6 \times 5 \times 1}{6^3} = \frac{30}{6^3}$$

$$4\text{回目で終了するとき、確率は}\frac{6 \times 5 \times 5 \times 1}{6^4} = \frac{25}{6^3}$$

の和から、

$$\frac{36 + 30 + 25}{6^3} = \frac{91}{216} \quad \dots \text{答}$$

(2) $r \geq 2$ のとき、 r 回以内に終了する事象の余事象は、

1回目から r 回目までずっと同じ目が連続しない事象であり、その確率は

$$\frac{\overset{\textcircled{1}}{6} \times \overset{\textcircled{2}}{5} \times \overset{\textcircled{3}}{5} \times \overset{\textcircled{4}}{5} \times \dots \times 5 \times 5}{6^r} = \frac{5^{r-1}}{6^{r-1}}$$

となるので、求める確率はこの余事象の確率なので、

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1} \quad \dots \text{答}$$

※ストレートに(1)と同じ計算をすると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^r \frac{6 \times 5^{k-2} \times 1}{6^k} &= \frac{1}{6} \sum_{k=2}^r \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{r-1} \end{aligned}$$

となる。