

(1)

$$x^2 + ax + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

について、①の判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4b \geq 0 \cdots \textcircled{2}$$

また、

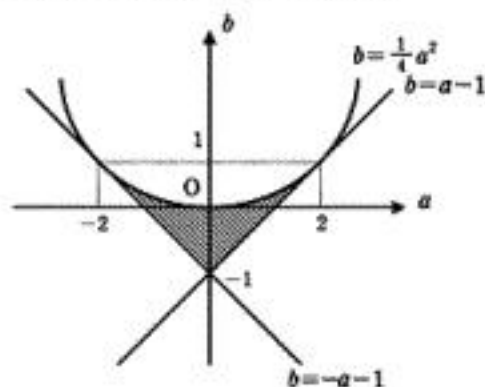
$$f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

について、①の全ての解の絶対値が 1 以下であるから、①の解は全て $-1 \leq x \leq 1$

に存在する。その条件は

$$\textcircled{2} \text{かつ} \begin{cases} -1 \leq -\frac{a}{2} \leq 1 \\ f(1) = a + b + 1 \geq 0 \\ f(-1) = -a + b + 1 \geq 0 \end{cases}$$

より、下図の斜線部(境界は全て含む)を得る。



(2)

$$a + 2b = k \Leftrightarrow b = -\frac{a}{2} + \frac{k}{2} \cdots \textcircled{3}$$

について、この直線が ab 平面上で(1)で求めた領域と交点を持つ範囲を調べればよい。すると③の傾きは $-\frac{1}{2}$ なので、右図から

(i) ③が点(2,1)を通る時

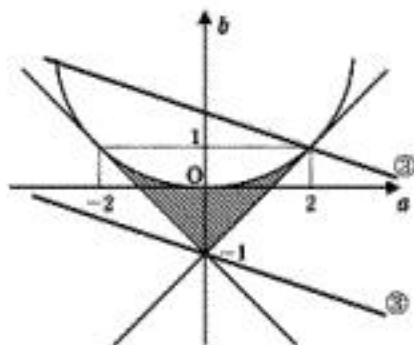
$$k = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

(ii) ③が点(0,-1)を通る時

$$k = -2$$

なので、 $a + 2b$ の最大値・最小値はそれぞれ

$$\text{最大値: } 4 \quad \text{最小値: } -2$$



(答) 最大値: 4 最小値: -2

$$C: x^2 + (y-2)^2 = 2$$

から円 C は中心 $(0, 2)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円である。

(1)

2 点 A, O を通り中心が $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ の円 (C_1 とする) の半径は

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。よって円 C, C_1 について

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(2 円の中心間の距離) = (2 円の半径の和)
が成立するので、2 円 C, C_1 は接する。

同様に、2 点 A, O を通り中心が $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ の円 (C_2 とする) の半径は

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

である。よって、2 円 C, C_2 について

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (2 - 2)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

(2 円の中心間の距離) = (2 円の半径の差)
が成立するので、2 円 C, C_2 は接する。以上より題意は示せた。

(証明完了)

(2)

円 C と円 C_1, C_2 の交点(接点)をそれぞれ P_1, P_2 とする。すると、円 C 上の P_1 以外の任意の点 P は円 C_1 の外部にあることから、

$$0^\circ < \angle APO \leq \angle AP_1O = 90^\circ$$

が成立するので、

$$\cos \angle APO \text{ の最小値は } 0$$

また、円 C 上の P_2 以外の任意の点 P は円 C_2 の内部にあることから、直線 AP と円 C_2 の A 以外の交点を P' とすると、

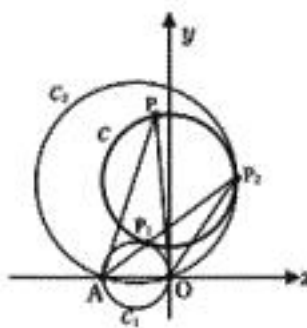
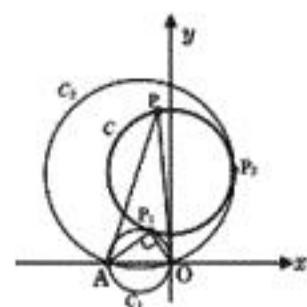
$$\angle AP_2O = \angle AP'O \leq \angle AP'O + \angle P'OP = \angle APO \leq 90^\circ$$

が成立する。よって、 $P_2(\sqrt{2}, 2)$ であることと

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_2A} = (-2\sqrt{2}, -2) \\ \overrightarrow{P_2O} = (-\sqrt{2}, -2) \end{cases}$$

とで、

$$\begin{aligned} \cos \angle AP_2O &= \frac{\overrightarrow{P_2A} \cdot \overrightarrow{P_2O}}{|\overrightarrow{P_2A}| |\overrightarrow{P_2O}|} \\ &= \frac{(-2\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (-2)(-2)}{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



(答) 最小値 0 最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(1)

$$A_n(j): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = j \quad (j=1, 2, 3)$$

を満たす数列のパターン数について、

(i)

$A_n(1): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = 1$ を満たす数列は

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$$

のみの 1 通り。

$A_n(2): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = 2$ を満たす数列は、 $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数を k とすると、初めて $a_k = 2$ となる k は n 通りある。

(ii) $n \geq 2$ のとき

$A_n(3): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n = 3$ について、 a_{n-1} の値は 1, 2, 3 の 3 パターン存在する。つまり、 $A_n(3)$ を a_{n-1} の値によって分割すると、

$$\begin{cases} A_{n-1}(1): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} = 1 \\ A_{n-1}(2): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} = 2 \\ A_{n-1}(3): a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} = 3 \end{cases}$$

の 3 パターンに分割できるから、

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

また、(i) を利用すると、

$$A_n(3) = 1 + n - 1 + A_{n-1}(3)$$

$$\Leftrightarrow A_n(3) - A_{n-1}(3) = n$$

となるので、 $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned} A_n(3) &= A_1(3) + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + n-1 \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad A_n(1)=1, \quad A_n(2)=n, \quad A_n(3)=A_{n-1}(1)+A_{n-1}(2)+A_{n-1}(3),$$

$$A_n(3)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)

$n \geq 2$ のとき、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1}, \quad a_{n-1} > a_n$$

を満たすパターン数を考えると、

$a_{n-1}=1$ のとき

0 通り

$a_{n-1}=2$ のとき、自動的に $a_n=1$ となり、パターン数は

$$A_{n-1}(2)=n-1 \text{ 通り}$$

$a_{n-1}=3$ のとき、 $a_n=1, 2$ であり、パターン数は

$$A_{n-1}(3)=\frac{1}{2}n(n-1) \text{ 通り}$$

以上より求めるパターン数は

$$n-1 + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot 2 = n^2 - 1 \text{ 通り}$$

$$(\text{答}) \quad n^2 - 1$$

$$a > 0, b \geq 0, 0 < p < 1$$

$$y = ax - bx^2 \cdots \textcircled{1}$$

について

(1)

①は点 $P(p, p^2)$ を通るので、

$$p^2 = ap - bp^2 \Leftrightarrow b = \frac{a}{p} - 1$$

$$(\text{答}) \quad b = \frac{a}{p} - 1$$

(2)

$$C: y = ax - bx^2 \quad (0 \leq x \leq p)$$

について、 $p \leq a \leq 1$ のときを考える。

(i) x を固定し、 C を a の関数とみる。(1)の結果から

$$y = ax - \left(\frac{a}{p} - 1 \right) x^2 = \frac{x}{p} (p - x) a + x^2$$

となり、これは傾き $\frac{x}{p}(p-x)$ の直線であるから、

$p \leq a \leq 1$ において y の値域は、傾きが 0 以上であるから

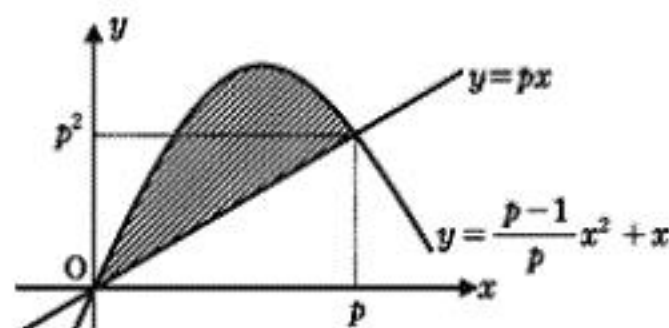
$$x(p-x) + x^2 \leq y \leq \frac{x}{p}(p-x) + x^2 \Rightarrow px \leq y \leq \frac{p-1}{p}x^2 + x \cdots \textcircled{2}$$

となる。

(ii) ②で固定していた x を $0 \leq x \leq p$ で変化させることで

領域 $0 \leq x \leq p$ かつ②が現れ、これが D である。

よって以下の図の斜線部分(境界は全て含む)となる。



$$(\text{答}) \quad px \leq y \leq \frac{p-1}{p}x^2 + x$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left\{ \left(\frac{p-1}{p}x^2 + x \right) - px \right\} dx \\ &= \frac{p-1}{p} \int_0^p x(x-p) dx \\ &= \frac{1}{6} (p^2 - p^3) \end{aligned}$$

となり、

$$S' = \frac{1}{6} p(2-3p)$$

より次の増減表を得る。

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
S'		+		-	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって、

$$S\left(p = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = \frac{1}{48}$$

$$S\left(p = \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \right\} = \frac{3}{128}$$

$$S\left(p = \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right\} = \frac{2}{81}$$

から、最大値は $\frac{2}{81}$ 、最小値は $\frac{1}{48}$

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{6} (p^2 - p^3), \text{ 最大値: } \frac{2}{81}, \text{ 最小値: } \frac{1}{48}$$