

①

$$C: x^2 + (y-2)^2 = 2$$

(1) 2点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $O(0, 0)$ を通る円の中心は、線分 AO の

垂直二等分線上にあることから、その中心の座標は

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right)$$

と書ける。このとき円の半径は

$$\sqrt{\left(-\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0-t)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}$$

となる。よって、円 C と求める円が接するための条件は、

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + (t-2)^2 = \left|\sqrt{t^2 + \frac{1}{2}} \pm \sqrt{2}\right|^2$$

を満たすことであり、

$$2t(t-2) = 0$$

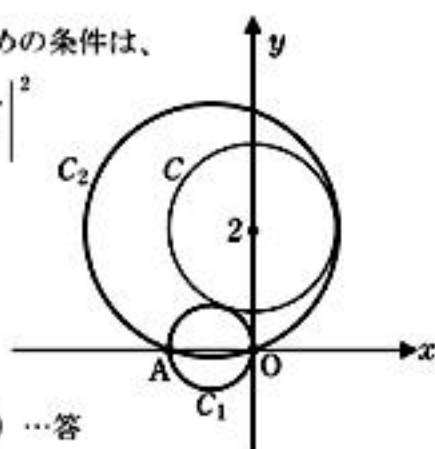
$$\Leftrightarrow t = 0, 2$$

より、求める円は

$$\text{中心} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \text{半径} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{円 } C_1 \text{ とする}) \quad \cdots \text{答}$$

$$\text{中心} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right), \text{半径} \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (\text{円 } C_2 \text{ とする}) \quad \cdots \text{答}$$

の2種類存在する。



(2) 円 C と円 C_1, C_2 の交点(接点)をそれぞれ P_1, P_2 とする。すると、

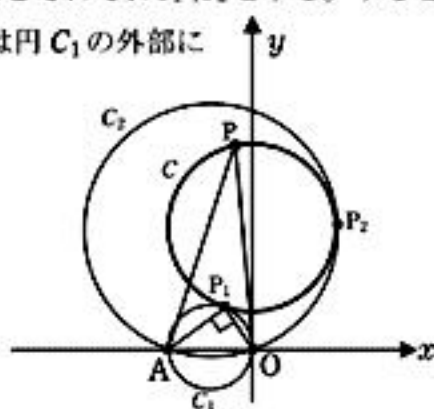
円 C 上の P_1 以外の任意の点 P は円 C_1 の外部に

あることから

$$0^\circ < \angle APO \leq \angle AP_1O = 90^\circ$$

が成立するので、

$$\cos \angle APO \text{ の最小値は } 0 \quad \cdots \text{答}$$



また、円 C 上の P_2 以外の任意の点 P は

円 C_2 の内部にあることから

$$\angle AP_2O \leq \angle APO < 90^\circ$$

が成立する。よって

$P_2(\sqrt{2}, 2)$ であることと

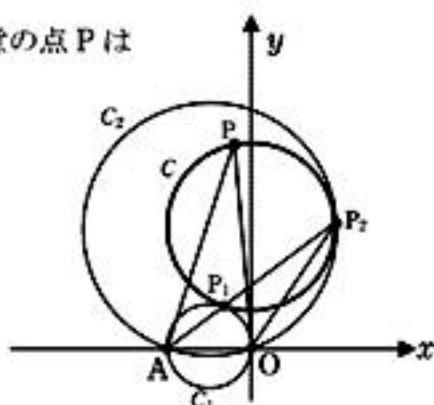
$$\overrightarrow{P_2A} = (-2\sqrt{2}, -2)$$

$$\overrightarrow{P_2O} = (-\sqrt{2}, -2)$$

とで、

$$\begin{aligned} \cos \angle AP_2O &= \frac{\overrightarrow{P_2A} \cdot \overrightarrow{P_2O}}{|\overrightarrow{P_2A}| |\overrightarrow{P_2O}|} \\ &= \frac{(-2\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (-2)(-2)}{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (-2)^2} \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となり、 $\cos \angle APO$ の最大値は $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\cdots$ 答



[2]

(1) $A_n(j): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ ($j=1, 2, 3, 4$) を満たす数列のパターン数について、

(i)

$A_n(1): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 1$ を満たす数列は、

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$$

のみの1通り。よって、 $A_n(1)=1$ …答

$A_n(2): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 2$ を満たす数列は、
 $n-1$ 個の○と1本の棒の順列

$$\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots, \bigcirc, |$$

の並べ方と1対1対応がつくことから、

$$A_n(2) = {}_{n-1}C_1 = n-1 \quad \dots \text{答}$$

例 ○○○○…○○ | ○○

($n-3$ 個)

(2 個)

$$a_1, \dots, a_{n-3} = 1$$

$$a_{n-2} = a_{n-1} = 2 \quad (a_n = 2)$$

と対応させる

(ii) $n \geq 2$ のとき、

$A_n(j): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n = j$ ($j=3, 4$) について、

a_{n-1} の値は $1, 2, 3, \dots, j$ の j パターン存在する。つまり $A_n(j)$ を a_{n-1} の値によって分割すると、

$$A_{n-1}(1): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} = 1$$

$$A_{n-1}(2): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} = 2$$

$$A_{n-1}(3): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} = 3$$

.....

$$A_{n-1}(j): a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} = j$$

の j パターンに分割できることから、

$$A_n(j) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + \dots + A_{n-1}(j) \quad \dots \text{答}$$

またこの結果を利用することで、

$$\begin{aligned} A_n(3) &= A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) \\ &= 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A_n(3) - A_{n-1}(3) = n$$

より、 $n \geq 2$ で

$$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^n k = 1 + \frac{1}{2}n(n+1) - 1 = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \dots \text{答}$$

同様に、

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4)$$

$$= 1 + (n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + A_{n-1}(4)$$

$$\Leftrightarrow A_n(4) - A_{n-1}(4) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

より、 $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned} A_n(4) &= A_1(4) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k(k+1) \\ &= 1 + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \\ &= 1 + \frac{1}{6} \{n(n+1)(n+2) - 6\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

別解

$A_n(3)$, $A_n(4)$ は誘導を無視して1対1対応の計算で直接出すことができ、

$$A_n(3) \quad \dots \quad n-1 \text{ 個の } \bigcirc, 2 \text{ 本の棒の順列から } {}_{n+1}C_2 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$A_n(4) \quad \dots \quad n-1 \text{ 個の } \bigcirc, 3 \text{ 本の棒の順列から } {}_{n+2}C_3 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

となる。

(2) $n \geq 2$ のとき、

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}, \quad a_{n-1} > a_n$$

を満たすパターン数を考えると、

$$a_{n-1} = 1 \text{ のとき, } 0 \text{ 通り}$$

$$a_{n-1} = 2 \text{ のとき, } a_n = 1 \text{ であればよく, } A_{n-1}(2) \times 1 \text{ 通り}$$

$$a_{n-1} = 3 \text{ のとき, } a_n = 1, 2 \text{ であればよく, } A_{n-1}(3) \times 2 \text{ 通り}$$

$$a_{n-1} = 4 \text{ のとき, } a_n = 1, 2, 3 \text{ であればよく, } A_{n-1}(4) \times 3 \text{ 通り}$$

なので、求める確率は

$$\begin{aligned} & \frac{A_{n-1}(2) + 2A_{n-1}(3) + 3A_{n-1}(4)}{4^n} \\ &= \frac{n-1 + 2 \times \frac{1}{2}n(n-1) + 3 \times \frac{1}{6}n(n-1)(n+1)}{4^n} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2^{2n+1}} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

③

関数 $y = xe^x$ について、 $y > 0$ ($x > 0$) であり、

$$y' = (x+1)e^x$$

より、 $x > 0$ において $y' > 0$ つまり単調増加関数である。

(1)

$$S_n = \int_n^{n+1} xe^x dx$$

について、

$$\frac{d}{dx} \{ (ax+b)e^x \} = (ax+a+b)e^x = xe^x$$

の計算から $a=1, b=-1$ となる。よって

$$\begin{aligned} S_n &= [(x-1)e^x]_n^{n+1} \\ &= ne^{n+1} - (n-1)e^n \\ &= \{(e-1)n+1\}e^n \end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e-1 + \frac{1}{n} \right) = e-1 \quad \cdots \text{答}$$

(2)

$$V_n = \pi \int_n^{n+1} (xe^x)^2 dx = \pi \int_n^{n+1} x^2 e^{2x} dx$$

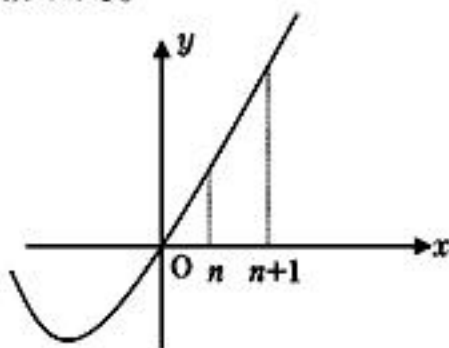
について、 $\frac{d}{dx} \{ (ax^2+bx+c)e^{2x} \} = \{ 2ax^2 + 2(a+b)x + b+2c \} e^{2x} = x^2 e^{2x}$ から

$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$ となる。よって

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \left[\frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} \right]_n^{n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} \{ \{ 2(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 \} e^{2(n+1)} - (2n^2 - 2n + 1) e^{2n} \} \\ &= \frac{\pi}{4} \{ 2(e^2 - 1)n^2 + 2(e^2 + 1)n + e^2 + 1 \} e^{2n} \end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} \{ 2(e^2 - 1)n^2 + 2(e^2 + 1)n + e^2 + 1 \} e^{2n}}{\{(e-1)n+1\}^2 e^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \times \frac{2(e^2 - 1) + \frac{2(e^2 + 1)}{n} + \frac{e^2 + 1}{n^2}}{\left(e-1 + \frac{1}{n} \right)^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{2(e^2 - 1) + 0 + 0}{(e-1+0)^2} \\ &= \frac{e^2 - 1}{2(e-1)^2} \pi \\ &= \frac{e+1}{2(e-1)} \pi \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



4

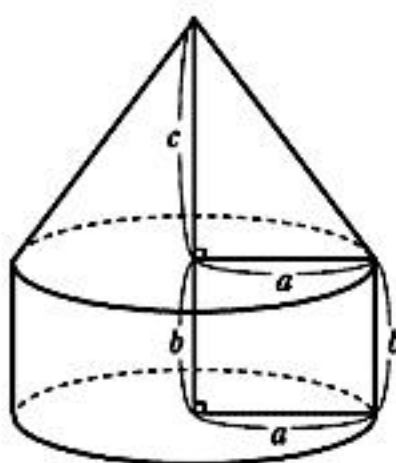
(1)

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 \times c + \pi a^2 \times b$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 (3b + c) \quad \dots \text{答}$$

$$S = \pi a \sqrt{a^2 + c^2} + 2\pi ab$$

$$= \pi a (\sqrt{a^2 + c^2} + 2b) \quad \dots \text{答}$$



(2)

(i) V, a を一定とすると、(1)の結果より

$$\frac{1}{3}\pi a^2 (3b + c) = V = \text{一定}$$

から、

$$3b + c = \frac{3V}{\pi a^2} \quad \dots \text{①}$$

も一定である。

ここで $b = xa, c = ya$ とすると、

$$\text{①} \Leftrightarrow a(3x + y) = \frac{3V}{\pi a^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x + y = \frac{3V}{\pi a^3} \quad \dots \text{②}$$

であり、 $x > 0$ と $0 < y < \frac{3V}{\pi a^3}$ を満たす。このとき、

$$S = \pi a (\sqrt{a^2 + y^2 a^2} + 2xa)$$

$$= \pi a^2 (\sqrt{1 + y^2} + 2x)$$

$$= \pi a^2 \left\{ \sqrt{1 + y^2} + 2 \left(\frac{V}{\pi a^3} - \frac{y}{3} \right) \right\} \quad (\text{②より})$$

$$= \pi a^2 \left(\sqrt{1 + y^2} - \frac{2}{3}y \right) + \frac{2V}{a}$$

と変形できる。そこで

$$f(y) = \sqrt{1 + y^2} - \frac{2}{3}y$$

とおくと、

$$f'(y) = \frac{3y - 2\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\text{から } f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$y > 0$ なので $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ である。

よって、 $y > 0$ における $f(y)$ の増減表は下の通り。

y	(0)	...	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	...
$f''(y)$		-	0	+
$f'(y)$		\		/

従って、 $\frac{2}{\sqrt{5}} \geq \frac{3V}{\pi a^3}$ のとき $f(y)$ は最小値を持たない。

$\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{3V}{\pi a^3}$ のとき $f(y)$ は $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ で最小となり、 $\pi a^2 > 0$ とで S も最小となる。

よって、 $0 < a < \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}}$ のとき、 $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ で S は最小値となり、

$$\begin{aligned} T &= S \left(y = \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \pi a^2 \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} + 2 \left(\frac{V}{\pi a^3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 + \frac{2V}{a} \quad \left(0 < a < \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}} \right) \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(ii) $T = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 + \frac{2V}{a} \quad \left(0 < a < \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}} \right)$ について、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{da} &= \frac{2\sqrt{5}}{3} \pi a - \frac{2V}{a^2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}\pi \left(a^3 - \frac{3\sqrt{5}V}{5\pi} \right)}{3a^2} \end{aligned}$$

これと $0 < \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{5\pi}} < \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}}$ とで

$a = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{5\pi}}$ で T は極小かつ最小となる。増減表は下の通り。

a	(0)	...	α	...	β
$f''(y)$		-	0	+	
$f'(y)$		\		/	

$$\left(\alpha = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{5\pi}}, \beta = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}} \text{ とする} \right)$$

このとき、②から

$$3x + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3V}{\pi \times \frac{3\sqrt{5}V}{5\pi}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

より $b = \frac{1}{\sqrt{5}}a, c = \frac{2}{\sqrt{5}}a$ となるので

$$\begin{aligned} a:b:c &= a:\frac{1}{\sqrt{5}}a:\frac{2}{\sqrt{5}}a \\ &= \sqrt{5}:1:2 \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

別解

相加平均・相乗平均の関係により (V は一定、 a の関数として)

$$T = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 + \frac{V}{a} + \frac{V}{a} \geq 3 \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 \times \frac{V}{a} \times \frac{V}{a}} = 3 \sqrt{\frac{\sqrt{5}\pi V^2}{3}}$$

等号成立条件は $\frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2 = \frac{V}{a} = \frac{V}{a}$ より $a^3 = \frac{3\sqrt{5}V}{5\pi}$ のときである。

⑤

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots ①$$

$$C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots ②$$

について、

焦点が一致することから、

その焦点を $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, $c > 0$ とおくと、

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

が成立する。そこで、楕円と双曲線の交点の1つを $P(p, q)$ とすると、

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1, \quad \frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 1 \quad \text{となり、連立することで、}$$

$$p^2 = \frac{a^2 \alpha^2 (b^2 + \beta^2)}{a^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2}, \quad q^2 = \frac{b^2 \beta^2 (\alpha^2 - a^2)}{a^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2}$$

となる。そこで①、②式それぞれについて $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=p, y=q}$ を計算する。

$$\text{①より } \frac{dy}{dx} = \frac{-\beta^2 x}{\alpha^2 y} \quad \text{なので点 } P \text{ における接線の傾きは } \frac{-\beta^2 p}{\alpha^2 q}$$

$$\text{②より } \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{なので点 } P \text{ における接線の傾きは } \frac{b^2 p}{a^2 q}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{-\beta^2 p}{\alpha^2 q} \times \frac{b^2 p}{a^2 q} &= -\frac{\beta^2 b^2 p^2}{\alpha^2 a^2 q^2} \\ &= -\frac{\beta^2 b^2}{\alpha^2 a^2} \times \frac{a^2 \alpha^2 (b^2 + \beta^2)}{a^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} \bigg/ \frac{b^2 \beta^2 (\alpha^2 - a^2)}{a^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} \\ &= -\frac{\beta^2 + b^2}{\alpha^2 - a^2} \\ &= -\frac{(\alpha^2 - c^2) + (c^2 - a^2)}{\alpha^2 - a^2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

より①、②上の点 P での接線は直交する。よって題意は示された。 …証明終わり

※二次曲線の接線の性質、角の二等分線を利用して証明することも可能である。

