

数 学

(理系学部)

12:30～14:30

注 意

- 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
- 問題紙は 3 ページある。
- 解答用紙は

解答用紙番号
数学 2—1

 (問①用),

解答用紙番号
数学 2—2

 (問②用),

解答用紙番号
数学 2—3

 (問③用),

解答用紙番号
数学 2—4

 (問④用),

解答用紙番号
数学 2—5

 (問⑤用)の 5 枚である。
- 解答用紙は 5 枚とも全部必ず提出せよ。
- 受験番号および座席番号(上下 2 箇所)は、監督員の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
- 各問に対する解答は、それぞれ 3 で指定された解答用紙に記入せよ。ただし、裏面を使用してはならない。
- 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
- 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

(理 系 学 部)

1 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

- (1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と点 $O(0, 0)$ を通り、円 C に接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

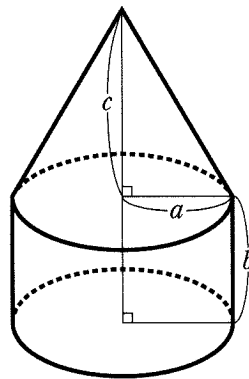
2 4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返して、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする。

- (1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、 $j = 1, 2, 3, 4$ とする。
- (i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。
- (ii) $n \geq 2$ のとき、 $A_n(j)$ ($j = 3, 4$) を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$ で表し、 $A_n(3), A_n(4)$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

3 xy 平面上の曲線 $y = xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x = n, x = n + 1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし、 n を自然数とする。

- (1) 図形 D_n の面積を S_n として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。
- (2) 図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。

- 4 図のような、半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に、同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



- (1) V をこの建物の体積、 S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。 V と S を a, b, c で表せ。
- (2) V を一定に保ちながら a, b, c を動かして、 S を最小にしたい。
- (i) $b = xa, c = ya$ とおき、 V と a を一定としたとき、 S の最小値 T を V と a で表せ。
- (ii) T が最小となるときの比 $a : b : c$ を求めよ。

- 5 楕円 $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と双曲線 $C_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。 C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、 C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。