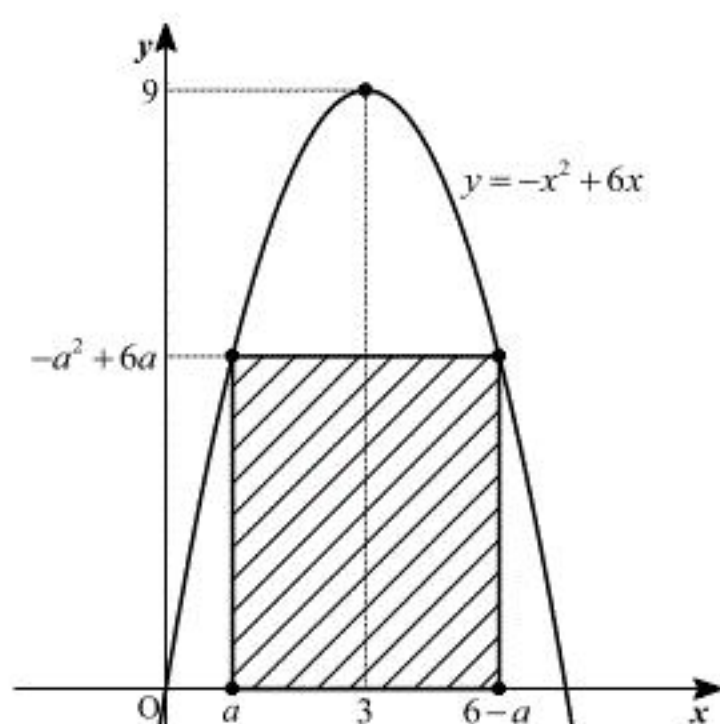


1

(1)



$S(a)$ は 4 点 $(a, -a^2 + 6a)$, $(6-a, -a^2 + 6a)$, $(a, 0)$, $(6-a, 0)$ を頂点にもつ長方形の面積である

から

$$\begin{aligned} S(a) &= (6-2a)(6a-a^2) \\ &= 2a^3 - 18a^2 + 36a \end{aligned}$$

となる。

(答) $S(a) = 2a^3 - 18a^2 + 36a$

(2)

$$\begin{aligned} S'(a) &= 6a^2 - 36a + 36 \\ &= 6\{a - (3 - \sqrt{3})\}\{a - (3 + \sqrt{3})\} \end{aligned}$$

であるから, $0 < a < 3$ における $S(a)$ の増減表は以下のようなになる。

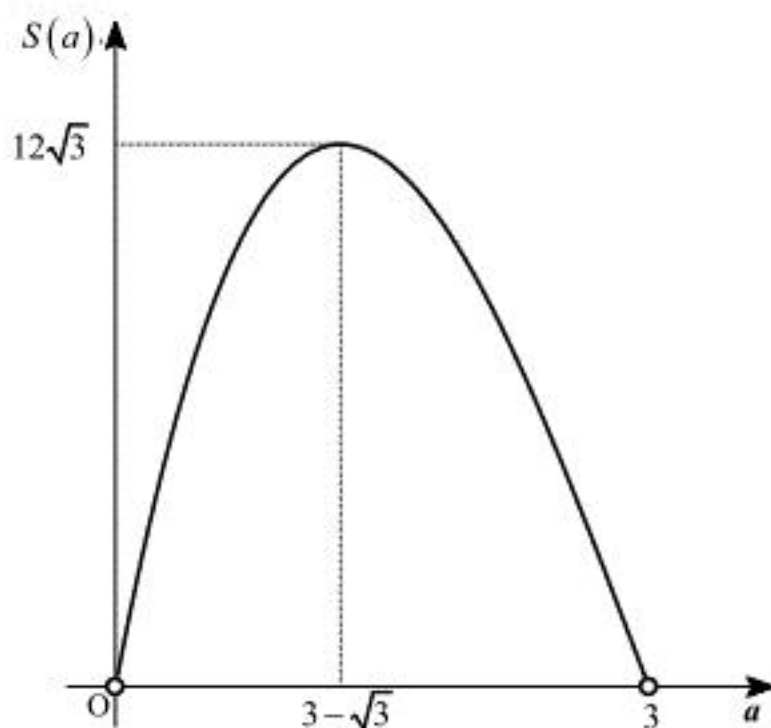
a	0	...	$3 - \sqrt{3}$	...	3
$S'(a)$	/	+	0	-	/
$S(a)$	/	↗	$12\sqrt{3}$	↘	/

よって, 関数 $S(a)$ は $a = 3 - \sqrt{3}$ のとき最大となる。

$$\lim_{a \rightarrow +0} S(a) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 3-0} S(a) = 0$$

であるから, 関数 $S(a)$ のグラフの概形は下図のようになる。



(答) $a = 3 - \sqrt{3}$, 前図

(1)

集合 $X(a)$ は、中心が点 $(a, 0)$ 、半径が $\left|\frac{a+1}{2}\right|$ である円 (C とおく) の周および内部の点の集合であり、集合 L は直線 $x-y-1=0$ (ℓ とおく) 上の点の集合である。 $X(a) \cap L = \phi$ となるのは、円 C と直線 ℓ が共有点を持たないときである。

[1] $a = -1$ のとき

集合 $X(a)$ は点 $(-1, 0)$ を表し、これは直線 ℓ 上の点ではないから、 $X(a) \cap L = \phi$ を満たす。

[2] $a \neq -1$ のとき

点 $(a, 0)$ と直線 ℓ の距離を d とおくと、円 C と直線 ℓ が共有点を持たないとき

$$\begin{aligned} d &> \left|\frac{a+1}{2}\right| \\ \Leftrightarrow \frac{|a-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} &> \left|\frac{a+1}{2}\right| \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}|a-1| &> |a+1| \\ \Leftrightarrow 2(a-1)^2 &> (a+1)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - 6a + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow a < -1, -1 < a < 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} < a & (\because a \neq -1) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より、 $X(a) \cap L = \phi$ を満たす a の値の範囲は

$$a < 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} < a$$

である。

(答) $a < 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} < a$

(2)

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 &\leq \frac{(a+1)^2}{4} \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 2(1+4x)a + 4x^2 + 4y^2 - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

となるから、 $P(p, q)$ とおくと、いかなる実数 a に対して $P \notin X(a)$ となるとき

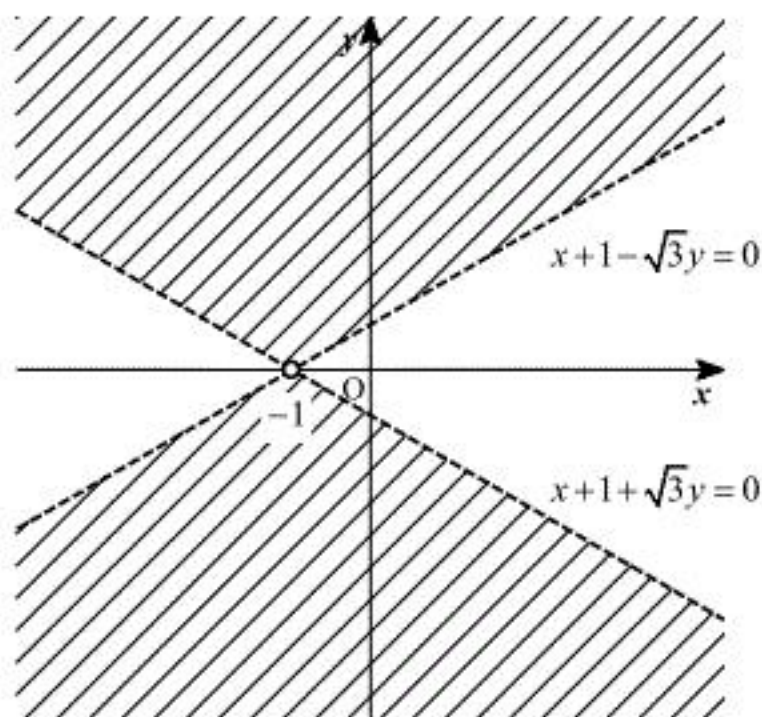
$$3a^2 - 2(1+4p)a + 4p^2 + 4q^2 - 1 > 0$$

がいかなる実数 a に対しても成り立つときであり、このとき a についての 2 次方程式

$3a^2 - 2(1+4p)a + 4p^2 + 4q^2 - 1 = 0$ の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow (1+4p)^2 - 3(4p^2 + 4q^2 - 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2p + 1 - 3q^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (p+1+\sqrt{3}q)(p+1-\sqrt{3}q) &< 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p+1+\sqrt{3}q > 0 \\ p+1-\sqrt{3}q < 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} p+1+\sqrt{3}q < 0 \\ p+1-\sqrt{3}q > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、これを満たす点 P の集合は下図の斜線部のようになる(ただし、境界線は含まない)。



(答) 前図

3

(1)

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} - a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

となるから、数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は定数列であり

$$a_2 - a_1 = 1$$

より

$$a_{n+1} - a_n = 1$$

となる。よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 0$ 、公差 1 の等差数列であるから

$$\begin{aligned} a_n &= 0 + 1 \times (n-1) \\ &= n-1 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n = n-1$

(2)

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つとき

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= k a_{n+1} - a_n \\ \Leftrightarrow \beta a_{n+1} + \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) &= k a_{n+1} - a_n \\ \Leftrightarrow (k - \alpha - \beta) a_{n+1} &= (1 - \alpha\beta) a_n \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} (k - \alpha - \beta) a_2 &= (1 - \alpha\beta) a_1 \\ \Leftrightarrow k - \alpha - \beta &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= k \end{aligned}$$

が成り立ち、このとき、②より

$$(1 - \alpha\beta) a_n = 0$$

となるから、 $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} (1 - \alpha\beta) a_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \alpha\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

のとき、②はすべての n について成り立つから、①を満たす α, β に対して③が成り立つことが示された。

(3)

(2)において、異なる実数 α, β が存在するとき、 α, β を解に持つ 2 次方程式

$$\begin{aligned} t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - kt + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が異なる実数解をもつ。よって、③の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (k+2)(k-2) &> 0 \\ \Leftrightarrow k < -2, 2 < k \end{aligned}$$

となる。このとき、③を解くと

$$t = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

となるから、 α, β の値は

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \frac{k \mp \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \text{ (複号同順)}$$

である。

(答) $k < -2, 2 < k, (\alpha, \beta) = \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \frac{k \mp \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right)$ (複号同順)

(1)

出る目の最小値が1となるのは、1の目が少なくとも1回出るときであり、この余事象は1の目が1回も出ないときである。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 &= 1 - \frac{625}{1296} \\ &= \frac{671}{1296} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{671}{1296}$$

(2)

出る目の最小値が1で、かつ出る目の最大値が6であるのは、1の目が少なくとも1回出て、かつ6の目が少なくとも1回出るときである。1の目が1回も出ない事象と6の目が1回も出ない事象をそれぞれ A, B とおき、それぞれの事象がおこる確率を $P(A), P(B)$ とおくと、1の目が少なくとも1回出て、かつ6の目が少なくとも1回出る事象の余事象の確率は

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ P(B) &= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \\ P(A \cap B) &= \left(\frac{4}{6}\right)^4 \end{aligned}$$

であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} &= 1 - \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 \right\} \\ &= 1 - \left(\frac{625}{1296} + \frac{625}{1296} - \frac{256}{1296} \right) \\ &= \frac{151}{648} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{151}{648}$$