

1

(1)

$$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$$

$$=\left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$0<\alpha<\beta<2$ のとき、

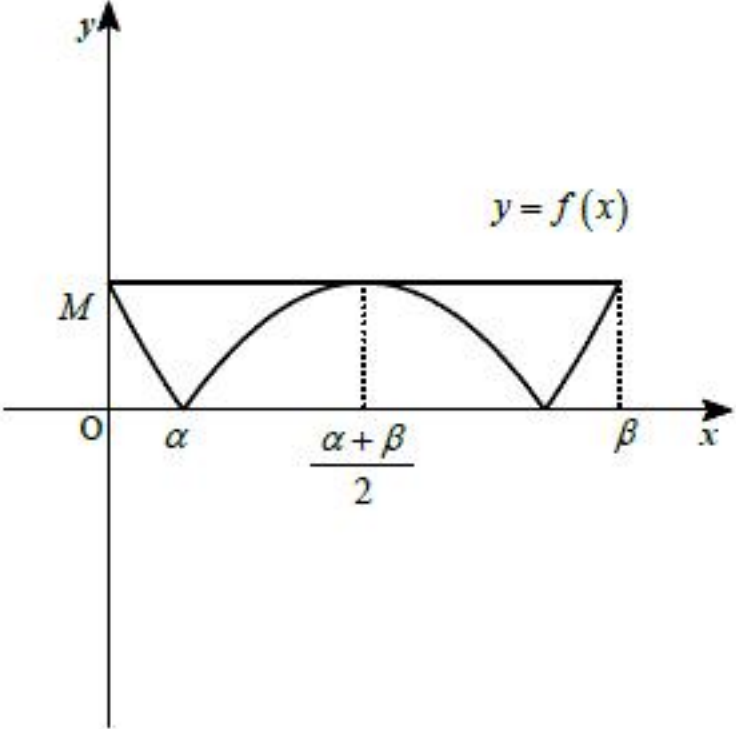
$$0<\alpha=\frac{\alpha+\alpha}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\beta+\beta}{2}<2$$

となるので、

$$0\leqq x\leqq 2$$

における関数 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	α	...	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	...	β	...	2
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



よって $f(x)=M$ を満たす x が 3 つ存在するのは、

$$f(0)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=f(2)$$

のときであり、

$$f(0)=f(2)$$

から、

$$\alpha\beta=4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta=2\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

また、

$$f(0)=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

から、①で右辺を計算して、

$$\alpha\beta=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2=8\alpha\beta\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

②、③から、

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots\textcircled{4}$$

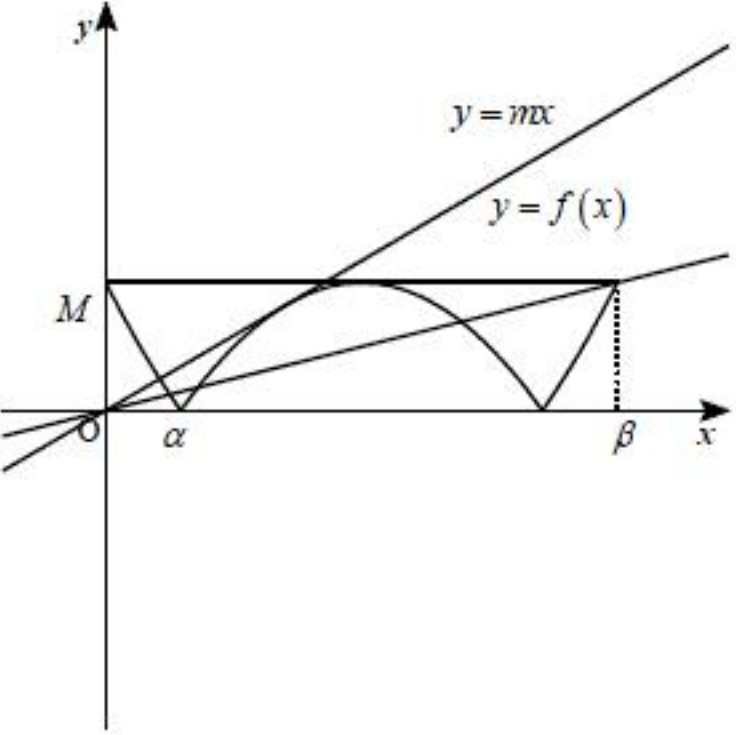
②、④から $t^2-2t+\frac{1}{2}=0$ を解いて、

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答え}$$

また $f(x)$ の最大値 M は、 $f(0)$ を計算することで、

$$M=f(0)=\alpha\beta=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots\text{答え}$$

(2)



$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの実数解をもつのは、 $y=f(x)$ と $y=mx$ が $\alpha<x<\beta$ で接するときの傾きを m_1 、点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ を通るとき傾きを m_2 として $m_2<m<m_1$ を満たす場合である。よって、

$$-x^2+2x-\frac{1}{2}=mx$$

$$\Leftrightarrow x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0\qquad\cdots\cdots\textcircled{5}$$

の判別式を D として、

$$D=(m-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}=0$$

から、

$$m=2\pm\sqrt{2}$$

⑤の重解が $\alpha<x<\beta$ の範囲にあるものは、

$$\alpha<\frac{2-m}{2}<\beta\Leftrightarrow-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$$

を満たす必要があるので、

$$m_1=2-\sqrt{2}$$

また、 $y=mx$ が点 $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ を通るとき、

$$\frac{1}{2}=m\times 2\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$$

より、

$$m_2=\frac{1}{4}$$

以上から、

$$\frac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}\qquad\cdots\cdots\text{答え}$$

[2]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ について,

$$A^{n+1} = A^n A$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & a_n + 2b_n \\ 2c_n + d_n & c_n + 2d_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n && \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c_{n+1} &= 2c_n + d_n && \cdots \cdots \textcircled{3} \\ d_{n+1} &= c_n + 2d_n && \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成立。

(1)

$a_n = d_n, b_n = c_n \cdots \cdots \textcircled{5} (n=1, 2, 3, \cdots)$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき,

$a_1 = d_1 = 2, b_1 = c_1 = 1$ なので $\textcircled{5}$ は成立する。

(ii) $n=k (k \geq 1)$ のとき,

$\textcircled{5}$ は成立すると仮定すると,

$$a_k = d_k, b_k = c_k$$

が成立。このとき,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + b_k \text{ (}\textcircled{1}\text{より)} \\ &= 2d_k + c_k \text{ (仮定より)} \\ &= d_{k+1} \text{ (}\textcircled{4}\text{より)} \\ b_{k+1} &= a_k + 2b_k \text{ (}\textcircled{2}\text{より)} \\ &= d_k + 2c_k \text{ (仮定より)} \\ &= c_{k+1} \text{ (}\textcircled{3}\text{より)} \end{aligned}$$

となる、 $\textcircled{5}$ は $n=k+1$ でも成立。

以上より題意は示せた。

$\cdots \cdots$ 証明終り

(2)

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_n = a_{n+1} - 2a_n$$

より、 $\textcircled{2}$ で,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n + 2b_n \\ \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} &= a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= 4a_{n+1} - 3a_n && \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

が成立。以下、 a_{2n-1} は偶数、 a_{2n} は奇数 $\cdots \cdots \textcircled{7}$ が全ての自然数 n で成立することを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき,

$$a_1 = 2$$

$\textcircled{1}$ で $n=1$ のとき,

$$a_2 = 2a_1 + b_1 = 5$$

なので $\textcircled{7}$ は成立。

(ii) $n=k (k \geq 1)$ のとき,

a_{2k-1} は偶数、 a_{2k} は奇数と仮定する。このとき $\textcircled{6}$ から,

$$a_{2k+1} = 4a_{2k} - 3a_{2k-1} = 4(\text{奇数}) - 3(\text{偶数})$$

は偶数であり,

$$a_{2k+2} = 4a_{2k+1} - 3a_{2k} = 4(\text{偶数}) - 3(\text{奇数})$$

は奇数である。

以上より題意は示せた

$\cdots \cdots$ 証明終り

[別解]

(1)

漸化式を解く

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から,

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$$

より,

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= 3^n, \\ a_{n+1} - b_{n+1} &= a_n - b_n \end{aligned}$$

より,

$$a_n - b_n = 1$$

以上から,

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}, b_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

同様にして $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から,

$$c_n = \frac{3^n - 1}{2}, d_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

と出るので(1)は明らか。

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^n + 1}{2} \\ &= \frac{(2+1)^n + 1}{2} \\ &= \frac{{}_nC_0 2^n + {}_nC_1 2^{n-1} + \cdots + {}_nC_{n-1} 2 + {}_nC_n + 1}{2} \\ &= {}_nC_0 2^{n-1} + {}_nC_1 2^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-2} 2 + n + 1 \\ &= 2({}_nC_0 2^{n-2} + {}_nC_1 2^{n-3} + \cdots + {}_nC_{n-2}) + n + 1 \end{aligned}$$

の形から,

$$\begin{aligned} n \text{ が奇数のとき, } a_n &= 2(\text{整数}) + (\text{奇数}) + 1 \quad \text{は偶数} \\ n \text{ が偶数の時, } a_n &= 2(\text{整数}) + (\text{偶数}) + 1 \quad \text{は奇数} \end{aligned}$$

となる。

[3]

$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$ について、

$$f'(x) = \frac{6x}{(2x^2+1)^2}, f''(x) = \frac{6(1-6x^2)}{(2x^2+1)^3}$$

と計算できる。

(1)

$0 < x < 1$ で $f'(x) > 0$ なので、この区間で関数 $f(x)$ は増加関数。よって、

$$f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 0 < f(x) < 1 \quad \cdots \text{証明終り}$$

(1)[別解]

$$f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2x^2+1} \right)$$

について、 $0 < x < 1$ より、

$$0 < x^2 < 1$$

よって、

$$0 < 2x^2 + 1 < 3$$

なので、

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2x^2+1} < 1$$

したがって、

$$0 < f(x) < \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 1$$

となる。

(2)

$f(x) - x = g(x)$ とおくと、

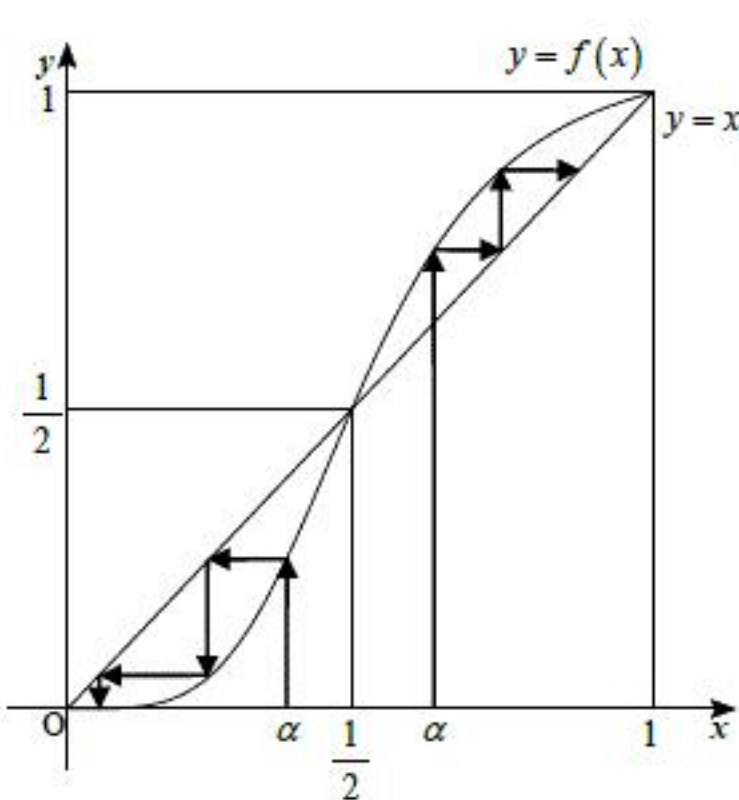
$$g(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1} - x = -\frac{x(2x-1)(x-1)}{2x^2+1}$$

から、

$$g(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{1}{2}, 1 \quad \cdots \text{答え}$$

(3)



$0 < \alpha < 1, a_1 = \alpha, a_{n+1} = f(a_n)$ について、上のグラフから、

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{1}{2} \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ のとき, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \end{cases}$$

と推定される。以下、これを証明する。

(1)の結果より、このとき生成される数列は常に $0 < a_n < 1$ を満たす。

(i) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ のときを考える。

$$0 < a_n < \frac{1}{2} \text{ とすると,}$$

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) < 0$$

を満たすことから $\{a_n\}$ は減少数列。よって、

$$0 < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < \frac{1}{2}$$

となる。また、 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n^2+1} a_n$ について $p(x) = \frac{3x}{2x^2+1}$ とおくと、

$$p'(x) = \frac{3(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$$

とで関数 $p(x)$ の $0 < x < \frac{1}{2}$ の増減は下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$p'(x)$		$+$	
$p(x)$	(0)	$\nearrow$	(1)

そこで、 $a_1 = \alpha < k < \frac{1}{2}$ を満たす実数 k が存在するので、任意の n に対して、

$$0 < p(a_n) \leq p(\alpha) < p(k) < 1$$

を満たす実数の定数 $p(k)$ が存在。この $p(k)$ を使うと常に

$$a_{n+1} < p(k)a_n$$

を満たすのでこれを繰り返し用いて、

$$0 < a_n < \{p(k)\}^{n-1} a_1$$

が成立し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{p(k)\}^{n-1} a_1 = 0$$

とではさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \cdots \text{証明終り}$$

(ii) $\alpha = \frac{1}{2}$ のとき、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$a_n = \frac{1}{2}$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \quad \cdots \text{証明終り}$$

(iii) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ のときを考える。

$$\frac{1}{2} < a_n < 1 \text{ とすると,}$$

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) > 0$$

を満たすことから数列 $\{a_n\}$ は増加数列。よって、

$$\frac{1}{2} < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$$

となる。また、 $1 - a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2a_n^2+1} (1-a_n)$ について $q(x) = \frac{1+x}{2x^2+1}$ とおくと、

$$q'(x) = \frac{3-2(x+1)^2}{(2x^2+1)^2}$$

とで関数 $q(x)$ の $\frac{1}{2} < x < 1$ での増減は下のようになる。

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	(1)
$q'(x)$		$-$	
$q(x)$	(1)	$\searrow$	$\left(\frac{2}{3}\right)$

そこで $\frac{1}{2} < l < \alpha = a_1$ を満たす実数 l が存在するので、任意の n に対して、

$$\frac{2}{3} < q(a_n) \leq q(\alpha) < q(l) < 1$$

を満たす実数の定数 $q(l)$ が存在。この $q(l)$ を使うと常に

$$1 - a_{n+1} < q(l)(1 - a_n)$$

を満たすのでこれを繰り返し用いて、

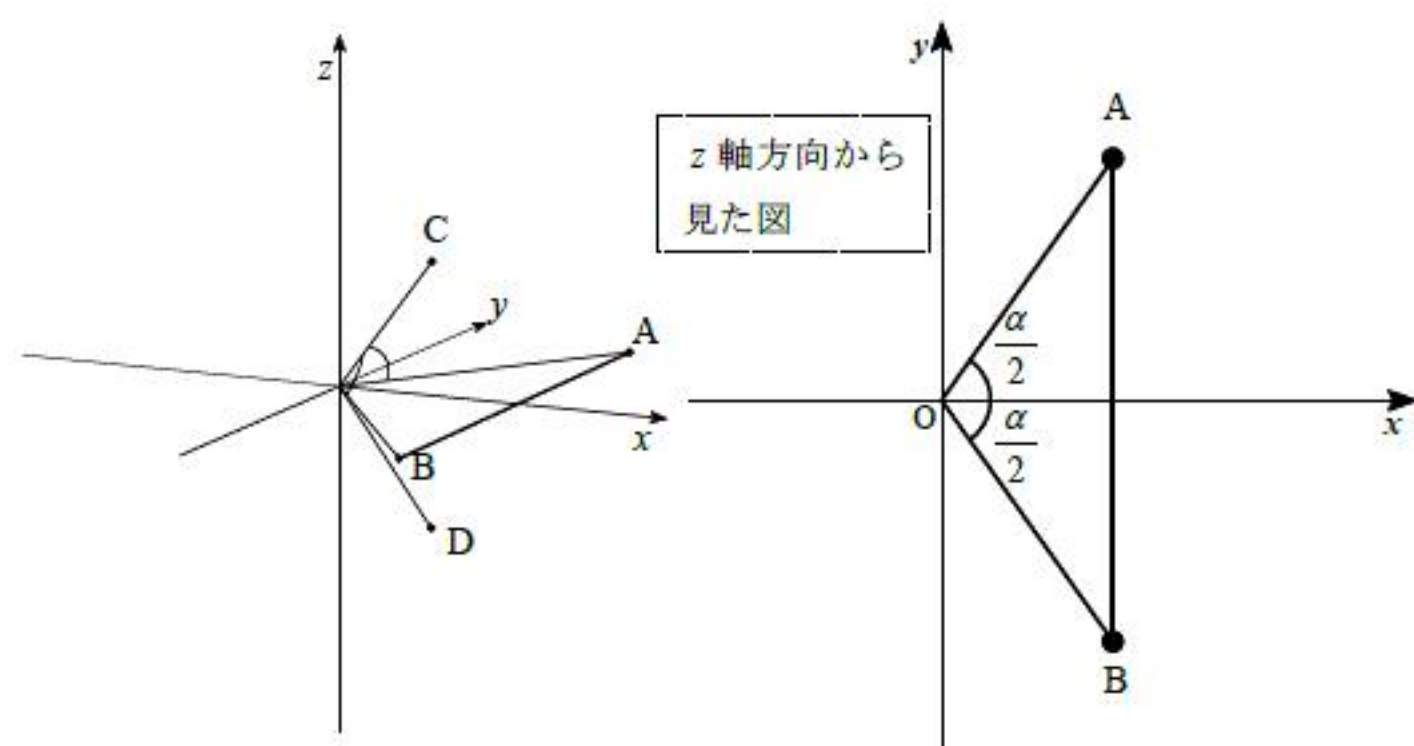
$$0 < 1 - a_n < \{q(l)\}^{n-1} (1 - a_1)$$

が成立し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{q(l)\}^{n-1} (1 - a_1) = 0$$

とではさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \cdots \text{証明終り}$$



$$A\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, 0\right), B\left(\cos\frac{\alpha}{2}, -\sin\frac{\alpha}{2}, 0\right), 0 < \alpha < \pi$$

$$C(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ とおく.}$$

(1)

条件より, $\angle COA = \angle COB = \theta$ なので, $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1$ と内積の定義から,

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OC} &= \overline{OC} \cdot \overline{OB} = \cos \theta \\ \Leftrightarrow x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} &= x \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} 2y \sin \frac{\alpha}{2} = 0 & \dots \textcircled{1} \\ \cos \theta = x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立. ①について, $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ から $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ なので,

$$y = 0$$

よって, ②から,

$$\cos \theta = x \cos \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

また, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より,

$$z^2 = 1 - (x^2 + y^2) = 1 - \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 + 0^2 \right\} = 1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

よって,

$$z = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2}$$

C の z 座標は正なので,

$$C \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}, 0, \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} \right) \quad \dots \text{答え}$$

(2)

(1)と同様に考えると,

$$D \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}, 0, -\sqrt{1 - \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2} \right)$$

であり, 以上の時,

$$\angle COA = \angle COB = \angle DOA = \angle DOB = \theta$$

を満たすので, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角が全て等しいためには, あと,

$$\angle AOB = \angle COD = \theta$$

を満たせばよい. よって,

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= \overline{OC} \cdot \overline{OD} = \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 + \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= 2 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 = \cos \theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \theta & \dots \textcircled{3} \\ \cos \theta = 2 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成立. ③と $0 < \alpha < \pi$, $0 < \theta < \pi$ とで,

$$\theta = \alpha$$

このとき, ④から,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \cos \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} &= 2 \cos^2 \theta - \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 \theta &= (\cos \theta + 1) \times \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \Leftrightarrow 3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{3}, 1 \end{aligned}$$

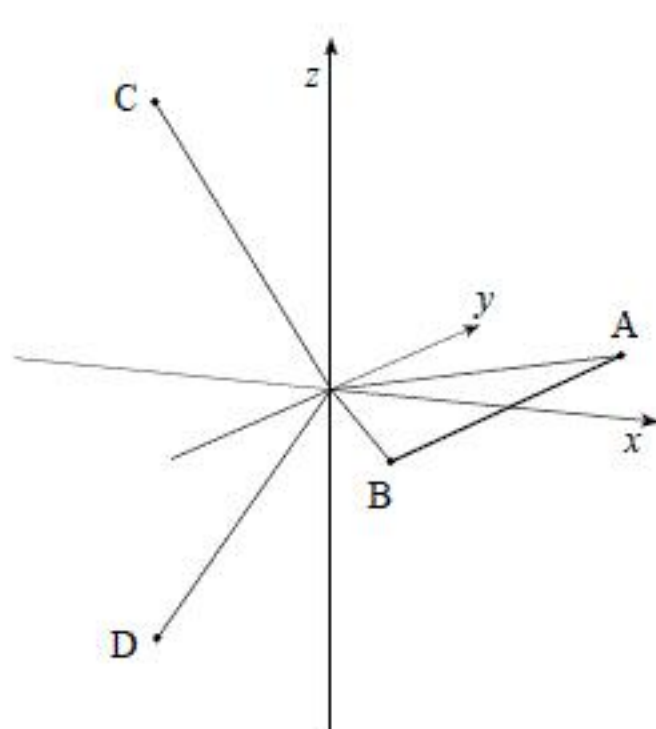
$0 < \theta < \pi$ なので,

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

となり, また,

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

である.



このとき, $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので,

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

以上より, 求める点 C の座標は,

$$\left(\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}, 0, \sqrt{1 - \left(\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)^2} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \quad \dots \text{答え}$$

(1)

$f(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt$ について,

$$f(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t) dt$$

より, $\int_0^1 e^t f(t) dt = a$ とおくと $f(x) = ae^x$ とかける。このとき,

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 e^t f(t) dt \\ &= \int_0^1 e^t a e^t dt \\ &= a \int_0^1 e^{2t} dt \\ &= a \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

から,

$$a = 0$$

となる。よって,

$$f(x) = 0$$

・・・証明終り

(2)

$g(x) = \int_0^1 e^{x+t} g(t) dt + x$ について,

$$g(x) = e^x \int_0^1 e^t g(t) dt + x$$

より, $\int_0^1 e^t g(t) dt = b$ とおくと, $g(x) = be^x + x$ とかける。このとき,

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 e^t g(t) dt \\ &= \int_0^1 e^t (be^t + t) dt \\ &= b \int_0^1 e^{2t} dt + \int_0^1 te^t dt \\ &= b \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 + [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= \frac{b}{2} (e^2 - 1) + e - [e^t]_0^1 \\ &= \frac{b}{2} (e^2 - 1) + 1 \end{aligned}$$

から,

$$b = \frac{2}{3 - e^2}$$

となる。よって,

$$g(x) = \frac{2}{3 - e^2} e^x + x$$

・・・答え