

①

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3} + 1)x + 16$$

について、

$$(1) \quad \gamma = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow \gamma - 1 = \sqrt{3}i$$

の両辺を 2 乗することで、

$$(\gamma - 1)^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 - 2\gamma + 4 = 0$$

を満たす。いま、 $P(x)$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ると、

$$\begin{aligned} P(x) = (x^2 - 2x + 4) \{ x^2 + (a + 2)x + 2a + b \} \\ + 2(b - 4\sqrt{3} - 8)x - 4(2a + b - 4) \end{aligned}$$

となるので、

$$P(\gamma) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\gamma^2 - 2\gamma + 4) \{ \gamma^2 + (a + 2)\gamma + 2a + b \} \\ + 2(b - 4\sqrt{3} - 8)\gamma - 4(2a + b - 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (b - 4\sqrt{3} - 8)\gamma = 2(2a + b - 4)$$

が成立。仮に

$$b - 4\sqrt{3} - 8 \neq 0$$

とすると、

$$\gamma = \frac{2(2a + b - 4)}{b - 4\sqrt{3} - 8}$$

となり、 a, b は実数、 γ は虚数であることから矛盾するので、

$$b - 4\sqrt{3} - 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。従って、

$$2a + b - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立するから①、②を解いて、

$$a = -2 - 2\sqrt{3}, \quad b = 8 + 4\sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$

(2) (1)より、 $a = -2 - 2\sqrt{3}$, $b = 8 + 4\sqrt{3}$ のとき

$$P(x) = (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4)$$

と因数分解できるので、 $P(x) = 0$ の解は、

$x^2 - 2x + 4 = 0$, $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ を解いて、

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i, \sqrt{3} \pm i$$

となるから γ 以外の複素数は、

$$1 - \sqrt{3}i, \sqrt{3} \pm i \quad \cdots \text{答}$$

[2]

(1) 直線 OP の方程式は、

$$y = (3n - 6)x$$

である。よって、

$x = k$ と直線 OP の交点の座標は、

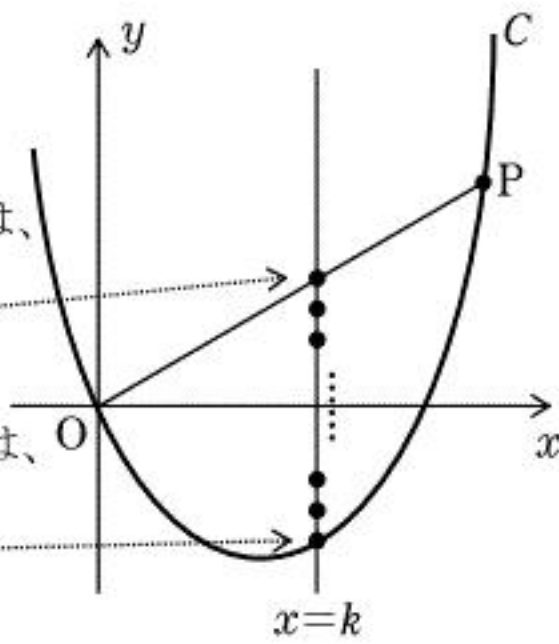
$$(k, (3n - 6)k)$$

$x = k$ と放物線 C の交点の座標は、

$$(k, 3k^2 - 6k)$$

よって、

$$\begin{aligned} f(k) &= (3n - 6)k - (3k^2 - 6k) + 1 \\ &= -3k^2 + 3nk + 1 \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$



$$(2) \sum_{k=0}^n f(k)$$

$$= -3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3n \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n+1$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(n^2 - n + 2) \quad \dots \text{答}$$

$$(3) f(k+1) - f(k)$$

$$= -3 \{ (k+1)^2 - k^2 \} + 3n \{ (k+1) - k \}$$

$$= -3(2k+1-n)$$

より、

$$f(k+1) - f(k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2}$$

が成立。よって、

n が偶数のとき、 $n = 2m$ (m は整数)として、

$0 \leq k \leq m$ で $f(k)$ は増加

$m \leq k$ で $f(k)$ は減少

とわかる。つまり、

$$f(0) < f(1) < f(2) < \dots < f(m) > f(m+1) > \dots$$

となるので $f(k)$ は $k = m = \frac{n}{2}$ で最大となる。

n が奇数のとき、 $n = 2m+1$ (m は整数)として、

$1 \leq k \leq m-1$ で $f(k)$ は増加

$k = m, m+1$ で $f(k)$ は同じ値を取る

$m+1 \leq k$ で $f(k)$ は減少

とわかる。つまり、

$$f(0) < f(1) < f(2) < \dots < f(m) = f(m+1) > \dots$$

となるので $f(k)$ は $k = m = \frac{n-1}{2}, k = m+1 = \frac{n+1}{2}$ で

最大となる。以上より、

$$\begin{cases} n \text{ が偶数のとき、 } k = \frac{n}{2} \\ n \text{ が奇数のとき、 } k = \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

③

$$(1) \quad \overrightarrow{PQ} = (t, 1-4t^2), \quad \overrightarrow{PR} = (-2t, 1-t^2)$$

について、 $t > 0$ のときどの 2 点も一致することがないので、
3 点 P, Q, R が同一直線上に存在する

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ} \text{ を満たす } 0 \text{ でない実数 } k \text{ が存在する}$$

より、

$$\begin{cases} -2t = kt \\ 1-t^2 = k(1-4t^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k+2)t = 0 \\ (4k-1)t^2 = k-1 \end{cases}$$

について、 $t > 0$ だから上式から $k = -2$

このとき下式から、

$$-9t^2 = -3$$

$$\Leftrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$t > 0 \text{ より } t = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad t_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ であり、区間 } 0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ において、}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |t(1-t^2) - (1-4t^2)(-2t)| \\ &= \frac{3}{2} |t(3t^2-1)| \\ &= \frac{3}{2} (t-3t^3) \quad \left(\text{区間 } 0 < t < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ で } 3t^2-1 < 0 \right) \end{aligned}$$

よって、

$$S'(t) = \frac{3}{2} (1-9t^2)$$

とで関数 $S(t)$ の増減は下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗		↘	

$$\text{よって関数 } S(t) \text{ は } t = \frac{1}{3} \text{ のとき最大となり、} \quad \dots \text{答}$$

最大値は、

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{3} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 \right\} = \frac{1}{3} \quad \dots \text{答}$$

[4]

条件から、

$$DA=AE=EB=BF=4$$

$$DC=DF=\sqrt{7}$$

となる。そこで展開図から三角錐を組み立てて、それを空間座標に貼り付けて考える。

$A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ とおく。3点 D , E , F が一致するのでその点を P として、 $P(x, y, z) (z > 0)$ とおく
と条件から、

$$AP=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$BP=4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$CP=\sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立。また $\angle ACE = 90^\circ$ から、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot x + 3(y-3) + 0 \cdot z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3$$

が成立。このとき、①, ②, ③から

$$x^2 + z^2 = 7, \quad (x-4)^2 + z^2 = 7$$

を解いて、

$$x=2, \quad z=\sqrt{3}$$

よって求める体積は、

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times z = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \right) \times \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$

