

①

条件から、

$$DA=AE=EB=BF=4$$

$$DC=DF=\sqrt{7}$$

となる。そこで展開図から三角錐を組み立てて、それを空間座標に貼り付けて考える。

$A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ とおく。3点 D, E, F が一致するのでその点を P として、 $P(x, y, z)$ ($z > 0$) とおくと条件から、

$$AP=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$BP=4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$CP=\sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立。また $\angle ACE = 90^\circ$ から、

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot x + 3(y-3) + 0 \cdot z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3$$

が成立。このとき、①, ②, ③から

$$x^2 + z^2 = 7, \quad (x-4)^2 + z^2 = 7$$

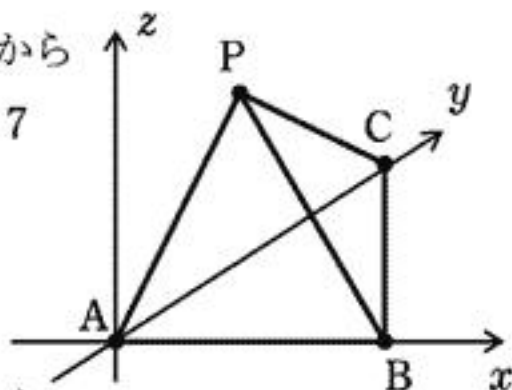
を解いて、

$$x=2, \quad z=\sqrt{3}$$

よって求める体積は、

$$\frac{1}{3} \times \triangle ABC \times z = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \right) \times \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$



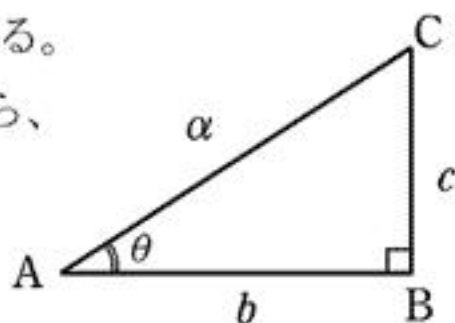
[2]

(1) $AB = b$, $BC = c$ とする。

$\angle CAB = \theta$ とすると条件から、

$$AD_k = k \cdot \frac{\alpha}{n}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\alpha}$$



が成立する。このとき $\triangle ABD_k$ について余弦定理から、

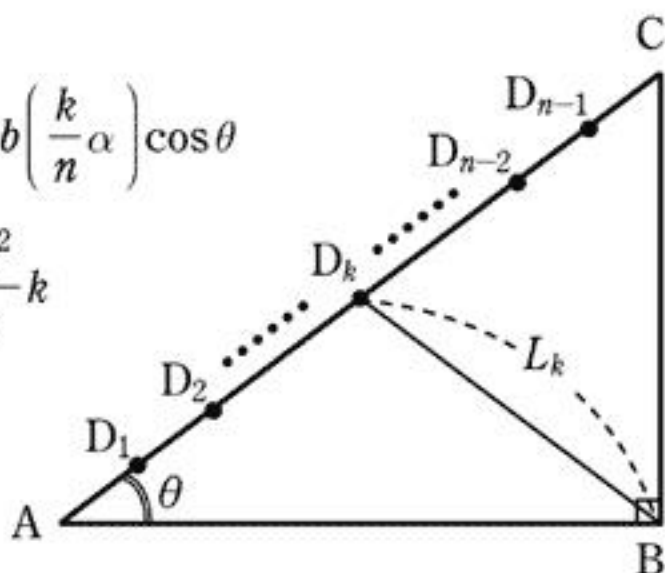
$$L_k^2 = BD_k^2$$

$$= b^2 + \left(\frac{k}{n} \alpha \right)^2 - 2b \left(\frac{k}{n} \alpha \right) \cos \theta$$

$$= b^2 + \frac{\alpha^2}{n^2} k^2 - \frac{2b^2}{n} k$$

が成立するので、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} L_k^2$$



$$= \sum_{k=1}^{n-1} b^2 + \frac{\alpha^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{2b^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= b^2(n-1) + \frac{\alpha^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

$$- \frac{2b^2}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= \frac{\alpha^2(n-1)(2n-1)}{6n} \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{\alpha^2}{6} (1-0)(2-0)$$

$$= \frac{\alpha^2}{3} \quad \dots \text{答}$$

[3]

$$(1) \quad C: y = \frac{x^2}{4} \text{ について、} y' = \frac{x}{2}$$

よって C 上の点 $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ における接線の傾きは、 $\frac{t}{2}$ となる。

そこで直線 l_2 と x 軸のなす角を φ とすると、

$$\tan \varphi = \frac{t}{2}$$

が成立。よって $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ から、

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$= \sin \varphi$$

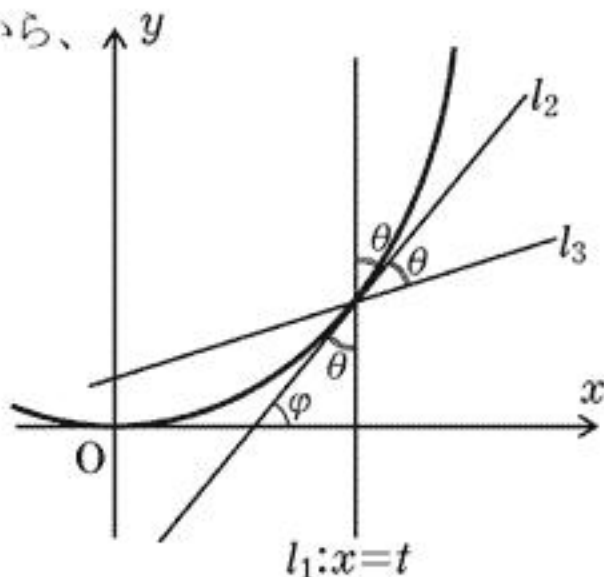
$$= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{t^2}{4 + t^2}}$$

$$= \frac{t}{\sqrt{4 + t^2}} \quad \cdots \text{答}$$



(2) 直線 l_3 と x 軸のなす角を ψ とすると、

$$\tan \psi = \tan(\varphi - \theta)$$

$$= \frac{\tan \varphi - \tan \theta}{1 + \tan \varphi \tan \theta}$$

$$= \frac{\frac{t}{2} - \frac{2}{t}}{1 + \frac{t}{2} \cdot \frac{2}{t}}$$

$$= \frac{t^2 - 4}{4t}$$

$$= \frac{t^2 - 4}{4t}$$

よって、直線 l_3 の方程式は、

$$y = \frac{t^2 - 4}{4t}(x - t) + \frac{t^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{t^2 - 4}{4t}x + 1 \quad \cdots \text{答}$$

(3) (2)の結果より直線 l_3 は t の値に依らず、

点 $(0, 1)$ を通る $\cdots$ 答

(4) 直線 l_3 、放物線 C の交点の x 座標を考える。

$$\frac{x^2}{4} = \frac{t^2 - 4}{4t}x + 1$$

$$\Leftrightarrow tx^2 - (t^2 - 4)x - 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - t)(tx + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = t, -\frac{4}{t}$$

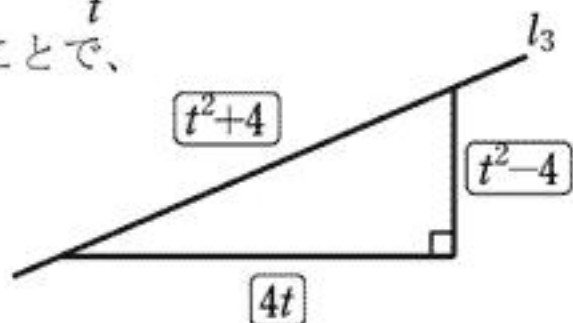
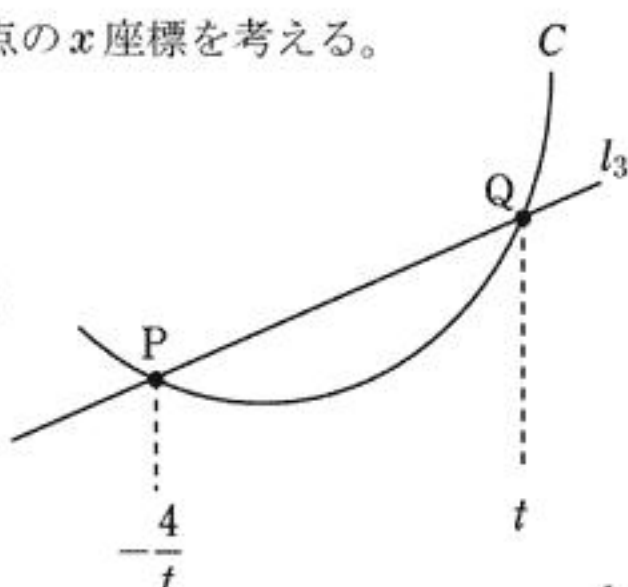
よって直線 l_3 の傾きを利用することで、

$$PQ = \left\{ t - \left(-\frac{4}{t} \right) \right\} \cdot \frac{t^2 + 4}{4t}$$

$$= \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{16}{t^2} + 8 \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(2\sqrt{t^2 \cdot \frac{16}{t^2}} + 8 \right)$$

$$= 4$$



を満たし、また等号は $t^2 = \frac{16}{t^2}$ から $t = 2$ のとき成立。よって

線分 PQ の長さが最小となるような t の値は、 $t = 2$ $\cdots$ 答

④

(1) 点 Q の座標を $Q(x, y)$ とおくと条件から、

$$OQ = AQ = PQ$$

$$\Leftrightarrow OQ^2 = AQ^2 = PQ^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2 = (x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = (x - \cos \theta)^2 + (y - \sin \theta)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta} \end{cases}$$

よって、

$$Q\left(\frac{a}{2}, \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta}\right) \quad \dots \text{答}$$

(2) $f(\theta) = \frac{1 - a \cos \theta}{2 \sin \theta}$ とおくとき、

$$2f'(\theta) = \frac{a - \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

よって $a - \cos \theta = 0$ を満たす θ を $\theta = \alpha$ とすると

$$\cos \alpha = a$$

を満たし、このとき $f(\theta)$ の

増減は右の表のようになる。

よって $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で極小かつ

最小となり、最小値は、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1 - a \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \\ &= \frac{1 - a \cdot a}{2 \sqrt{1 - a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

θ	(0)	...	α	...	(π)
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$					

⑤

$$\begin{aligned}
 (1) \quad a_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
 &= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4} \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad a_n + a_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{ (\tan x)^{2n} + (\tan x)^{2n+2} \} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x (1 + \tan^2 x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx
 \end{aligned}$$

ここで $t = \tan x$ とおくと $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\begin{cases} x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ t: 0 \rightarrow 1 \end{cases}$ から、

$$\begin{aligned}
 a_n + a_{n+1} &= \int_0^1 t^{2n} dt \\
 &= \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

よって、

$$a_{n+1} = -a_n + \frac{1}{2n+1} \quad \cdots \text{答}$$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $0 \leq \tan x \leq 1$ を満たす。このとき、

$$0 \leq (\tan x)^{2n+2} \leq (\tan x)^{2n}$$

が成立するから、等号が有限個の x でのみ成立することを考慮して、

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n+2} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 < a_{n+1} < a_n$$

を満たす。よって(2)から、

$$a_n + a_{n+1} > a_{n+1} + a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} > 2a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} < \frac{1}{2(2n+1)}$$

が成立。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(2n+1)} = 0$$

とではさみうちの原理から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \cdots \text{答}$$

(4) (2)の結果を利用することで、 n が大きな数であるとき、

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} \\
 &= 1 - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - (a_3 + a_4) + \cdots \\
 &\quad \cdots + (-1)^{n+1} (a_{n-1} + a_n) \\
 &= 1 - a_1 + (-1)^{n+1} a_n \\
 &= \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} a_n
 \end{aligned}$$

となる。よって(3)の結果とで、

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} a_n \right\} \quad \cdots ※ \\
 &= \frac{\pi}{4} \quad \cdots \text{答}
 \end{aligned}$$

※細かいことを言うと、

$$\frac{\pi}{4} - a_n \leq \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} a_n \leq \frac{\pi}{4} + a_n$$

からはさみうちの原理に持っていく。