

1

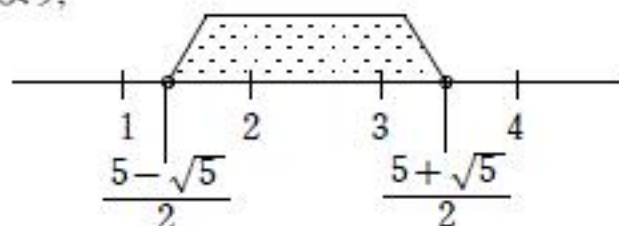
$$(1) \quad n^2 - 5n + 5 < 0$$

$$\left(n - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(n - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) < 0$$

$$\therefore \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < n < \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2^2 < 5 < 3^2 \text{ より, } 2 < \sqrt{5} < 3$$

以上より,



①を満たす整数 n は 2 と 3 である. ...(答)

$$(2) \quad [x]^2 - 5[x] + 5 < 0 \quad (1) \text{より, } [x] = 2, 3$$

$$[x] = 2 \text{ のとき, } 2 \leq x < 3$$

$$[x] = 3 \text{ のとき, } 3 \leq x < 4$$

$$\text{よって, } 2 \leq x < 4 \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad (2) \text{より, } 2 \leq x < 3 \text{ のとき, } [x] = 2 \text{ なので, } x^2 - 5[x] + 5 = 0 \text{ に代入すると,}$$

$$x^2 - 10 + 5 = 0$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{範囲より, } x = \sqrt{5}$$

同様に,

$$3 \leq x < 4 \text{ のとき, } [x] = 3 \text{ なので, } x^2 - 5[x] + 5 = 0 \text{ に代入すると,}$$

$$x^2 - 15 + 5 = 0$$

$$x^2 = 10$$

$$x = \pm\sqrt{10} \quad \text{範囲より, } x = \sqrt{10}$$

$$\text{以上より, } x = \sqrt{5}, \sqrt{10} \quad \dots (\text{答})$$

(1) C は、点 $P(-1, 3)$ 、点 $Q(1, 4)$ を通ることから、

$$\begin{cases} 3 = a - b + c & \dots \textcircled{1} \\ 4 = a + b + c & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より}, -1 = -2b \quad \therefore b = \frac{1}{2} \quad \dots(\text{答})$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して}, 3 = a - \frac{1}{2} + c \quad \therefore c = \frac{7}{2} - a \quad \dots(\text{答})$$

(2) (1)の結果を代入すると C は、

$$y = ax^2 + \frac{1}{2}x - a + \frac{7}{2}$$

$$y' = 2ax + \frac{1}{2}$$

接線 l_1 は、

$$y - 3 = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

$$y = \left(-2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

接線 l_2 は、

$$y - 4 = \left(2a + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

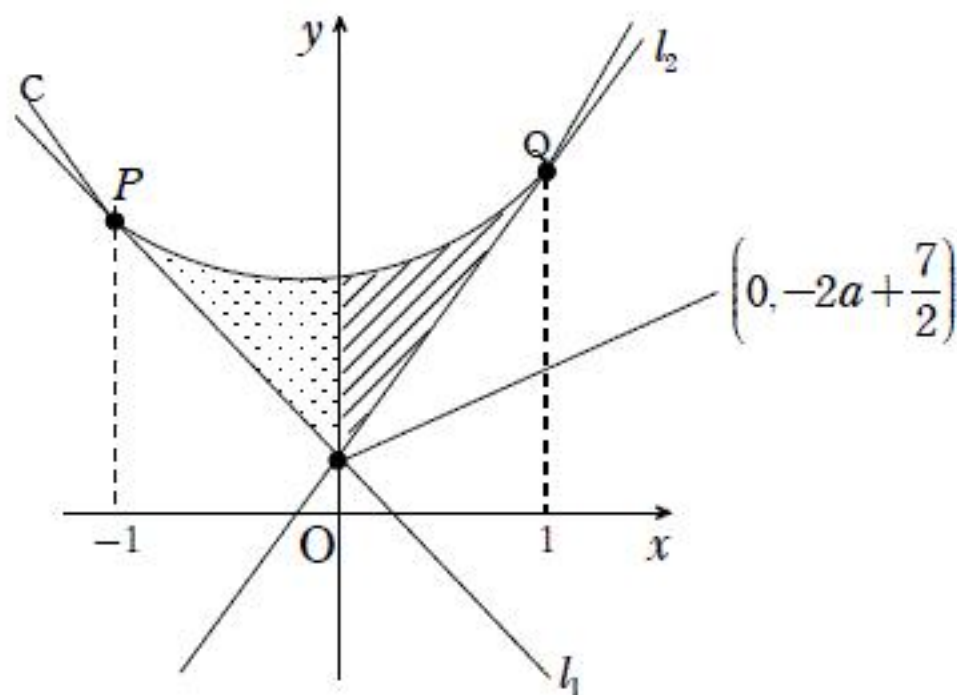
$$y = \left(2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}$$

ゆえに、 l_1 と l_2 の連立方程式を解くと、

$$x = 0, y = -2a + \frac{7}{2}$$

以上より、 l_1 と l_2 の交点は、 $\left(0, -2a + \frac{7}{2}\right)$ $\dots(\text{答})$

(3) 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれた面積は下図のようになる。



$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(ax^2 + \frac{1}{2}x - a + \frac{7}{2} - \left\{\left(2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}\right\}\right) dx \\ & + \int_{-1}^0 \left(ax^2 + \frac{1}{2}x - a + \frac{7}{2} - \left\{\left(-2a + \frac{1}{2}\right)x - 2a + \frac{7}{2}\right\}\right) dx \\ & = \int_0^1 (ax^2 - 2ax + a) dx + \int_{-1}^0 (ax^2 + 2ax + a) dx \\ & = \left[\frac{1}{3}ax^3 - ax^2 + ax\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}ax^3 + ax^2 + ax\right]_{-1}^0 \\ & = \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

$$\text{図形の面積は } 1 \text{ より}, \frac{2}{3}a = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(1) $l_1: ax+y=2a+2$ を変形すると,

$$ax-2a+y-2=0$$

$$(x-2)a+(y-2)=0$$

$$x-2=0 \quad \therefore x=2$$

$$y-2=0 \quad \therefore y=2$$

以上より, $P(2,2)$... (答)

(2) l, l_1, l_2 を傾きがわかるように変形すると,

$$\begin{cases} l: y=-x \\ l_1: y=-ax+2a+2 \\ l_2: y=-bx+2b+2 \end{cases}$$

(i) $l \parallel l_1$ でないための条件は, $-1 \neq -a \quad \therefore a \neq 1$... ①

(ii) $l \parallel l_2$ でないための条件は, $-1 \neq -b \quad \therefore b \neq 1$... ②

(iii) $l_1 \parallel l_2$ でないための条件は, $-a \neq -b \quad \therefore a \neq b$... ③

(iv) l_1, l_2 は, (1) より (2,2) で交わる.

l は (2,2) を通らないので, l, l_1, l_2 の3点が交わることがない.

(i) ~ (iv) より l, l_1, l_2 が三角形が作られるための条件は,

$$a \neq 1, b \neq 1, a \neq b \quad \dots (\text{答})$$

(3) (2) より $a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$ の条件の下で考える.

点 (1,1) が三角形の内部に入るためには右図のように,

l と l_1 の交点と l と l_2 の交点が $y=x$ をはさむように
一方が, 第2象限, 他方が, 第4象限に取ればよい.

つまり各交点の x 座標が異符号であればよい.

l と l_1 の交点の x 座標は, $-x = -ax + 2a + 2$

$$x = \frac{2(a+1)}{a-1} \quad \dots ④$$

l と l_2 の交点の x 座標は, $-x = -bx + 2b + 2$

$$x = \frac{2(b+1)}{b-1} \quad \dots ⑤$$

④, ⑤が異符号であればよいので,

(i) $\frac{2(a+1)}{a-1} > 0$ かつ $\frac{2(b+1)}{b-1} < 0$

$$\frac{2(a+1)}{a-1} > 0$$

$a-1 > 0$ のとき, つまり, $a > 1$

$2(a+1) > 0 \quad a > -1$ よって, $a > 1$

$a-1 < 0$ のとき, つまり, $a < 1$

$2(a+1) < 0 \quad a < -1$ よって, $a < -1$

したがって, $a < -1, 1 < a$

$$\frac{2(b+1)}{b-1} < 0$$

$b-1 > 0$ のとき, つまり $b > 1$

$2(b+1) < 0 \quad b < -1$ よって, 解なし.

$b-1 < 0$ のとき, つまり $b < 1$

$2(b+1) > 0 \quad b > -1$ よって, $-1 < b < 1$

したがって, $-1 < b < 1$

$$\text{以上より, } \begin{cases} a < -1, 1 < a \\ -1 < b < 1 \end{cases}$$

(ii) $\frac{2(a+1)}{a-1} < 0$ かつ $\frac{2(b+1)}{b-1} > 0$

(i) と同様に求めると, $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ b < -1, 1 < b \end{cases}$

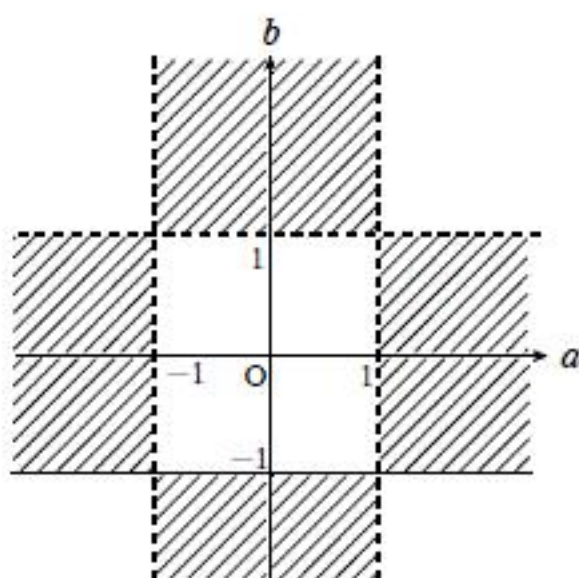
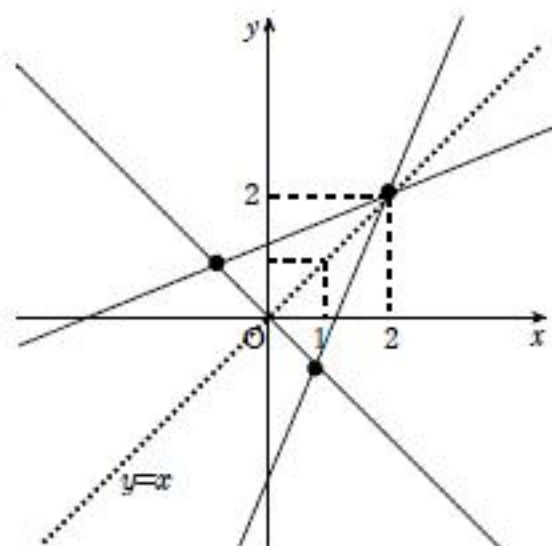
(i) と (ii) より求める a, b の範囲は,

$$\begin{cases} a < -1, 1 < a \\ -1 < b < 1 \end{cases} \quad \text{または, } \begin{cases} -1 < a < 1 \\ b < -1, 1 < b \end{cases}$$

... (答)

図示すると右図のようになる.

(境界線は含まない.)





$q+r$ 個分のうち、1個移動するので $q+r$ 通り.

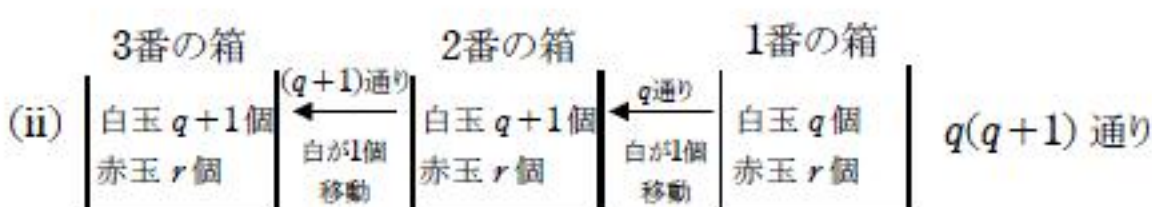
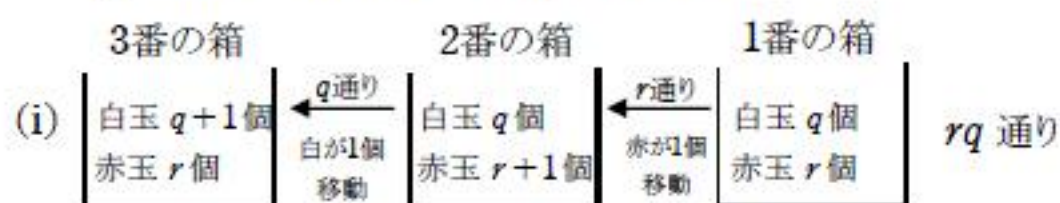
$$s_2 = q+r \quad \dots(\text{答})$$

(2) 3番の箱への移動を考えると、(1)より2番の箱には $q+r+1$ 個入っているので
そのうちの1個が移動するので、 $q+r+1$ 通り

$$s_3 = s_2(q+r+1)$$

$$= (q+r)(q+r+1) \quad \dots(\text{答})$$

a_3 つまり、3番の箱の白玉が $q+1$ 個である場合



(i), (ii)より,

$$rq + q(q+1) = q(r+q+1) \quad \dots(\text{答})$$

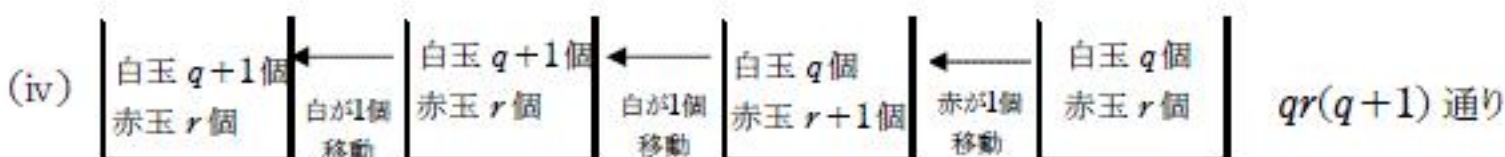
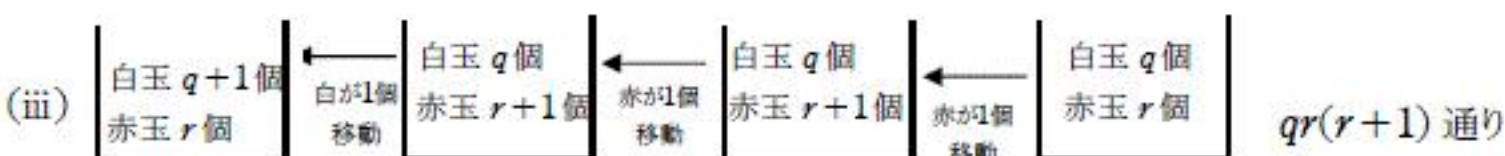
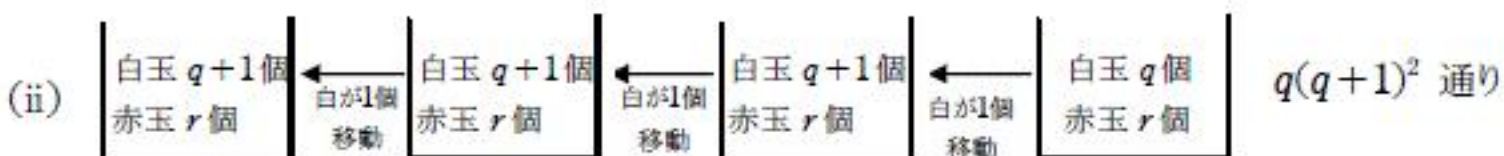
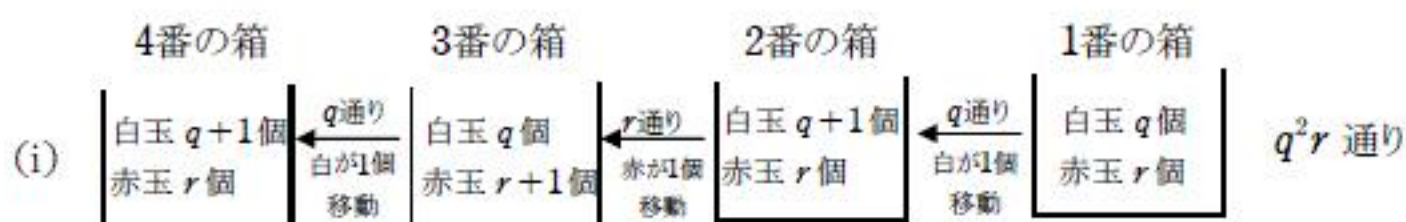
(3) (2)と同様に、4番の箱への移動を考えると
3番の箱には $q+r+1$ 個入っているので.

$$s_4 = s_3(q+r+1)$$

$$= (q+r)(q+r+1)(q+r+1)$$

$$= (q+r)(q+r+1)^2 \quad \dots(\text{答})$$

a_4 つまり 4番の箱の白玉が $q+1$ 個である場合、以下4パターンの移動が考えられる.



以上より,

$$a_4 = q^2 r + q(q+1)^2 + qr(r+1) + qr(q+1)$$

$$= q\{qr + (q+1)^2 + r(r+1) + r(q+1)\}$$

$$= q[(q+1)\{(q+1)+r\} + qr + r(r+1)]$$

$$= q\{(q+1)(q+r+1) + r(q+r+1)\}$$

$$= q(q+r+1)^2 \quad \dots(\text{答})$$