

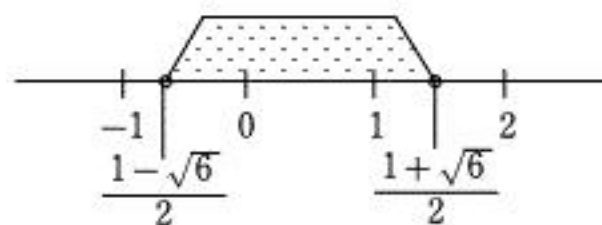
$$(1) \quad n^2 - n + \frac{5}{4} < 0$$

$$4n^2 - 4n + 5 < 0$$

$$\therefore \frac{1-\sqrt{6}}{2} < n < \frac{1+\sqrt{6}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2^2 < 6 < 3^2 \text{ より, } 2 < \sqrt{6} < 3$$

以上より,



①を満たす整数 n は 0 と 1 である. ...(答)

$$(2) \quad [x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0 \quad (1) \text{より, } [x] = 0, 1$$

$$[x] = 0 \text{ のとき, } 0 \leq x < 1$$

$$[x] = 1 \text{ のとき, } 1 \leq x < 2$$

$$\text{よって, } 0 \leq x < 2 \quad \dots \text{(答)}$$

$$(3) \quad (2) \text{より, } 0 \leq x < 1 \text{ のとき, } [x] = 0 \text{ なので, } x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0 \text{ に代入すると,}$$

$$x^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{これは, } 0 \leq x < 1 \text{ を満たさないので不適.}$$

同様に,

$$1 \leq x < 2 \text{ のとき, } [x] = 1 \text{ なので, } x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0 \text{ に代入すると,}$$

$$x^2 - 1 - \frac{5}{4} = 0 \quad \therefore x = \pm \frac{3}{2} \quad 1 \leq x < 2 \text{ より, } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{以上より, } x = \frac{3}{2} \quad \dots \text{(答)}$$

- (1) ケーリー・ハミルトンの定理より行列 A に対して,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots \textcircled{1} \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{ただし, } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

このとき (i) $a+d = ad-bc = 0$ が成り立つので代入すると,

$$A^2 - 0 \cdot A + 0 \cdot E = O$$

$$\therefore A^2 = O$$

以上より, (i) ならば (ii) は成り立つ.

[証明終]

- (2) (iii) ある自然数 n に対して $A^n = O$ が成り立つとする.

このとき, $ad-bc \neq 0$ であると仮定すると,

行列 A には逆行列 A^{-1} が存在することとなる.

$A^n = O$ の両辺に左から A^{-1} を n 回かけると

$$E = O$$

となり矛盾する.

よって, $A^n = O$ ならば, $ad-bc = 0$ が示された.

[証明終]

- (3) (2) より (iii) ならば $ad-bc = 0$ は示された.

(iii) ならば $a+d = 0$ を以下に示す.

$n=1$ のとき,

(iii) に代入すると, $A^1 = A = O$ より $a+d = 0$ は成立.

$n \geq 2$ のとき,

① に $ad-bc = 0$ に代入すると,

$$A^2 - (a+d)A + 0 \cdot E = O$$

$$A^2 = (a+d)A$$

したがって, 両辺に右から A をかけ続けると,

$$A^n = (a+d)^{n-1} A$$

よって, $A^n = O$ を成り立つとするので,

$$(a+d)^{n-1} A = O$$

$$(a+d) = 0 \text{ または } A = O$$

いずれの場合にしても, $a+d = 0$

以上より, (iii) ならば (i) が示された.

[証明終]

3

- (1) $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ を円の方程式としておく.
3点を代入すると,

$$\begin{cases} n = 0 \\ 4 + 1 + 2l + m + n = 0 \\ 1 + 4 + l + 2m + n = 0 \end{cases}$$

整理すると,

$$\begin{cases} 2l + m = -5 \\ l + 2m = -5 \end{cases}$$

連立方程式を解くと,

$$l = m = -\frac{5}{3}, n = 0$$

以上より,

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y = 0 \quad \dots(\text{答})$$

- (2) (1)より3点 O, A', B' を通る円は,

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y = 0 \text{より,}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{18} \quad \dots\text{①}$$

球面 S の中心 C は①の中心に z 軸方向に垂直に下したもののなので,

中心 C は, $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, c\right)$ といえる.

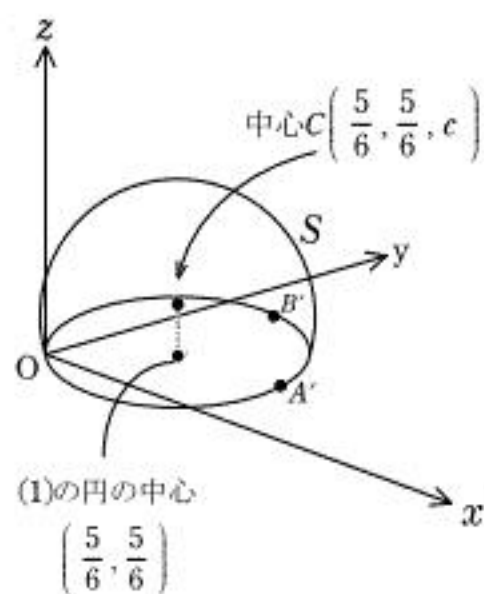
$$\text{よって, } a \text{ と } b \text{ の条件は } a = \frac{5}{6}, b = \frac{5}{6}$$

球体 S の半径は,

$$OC = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + c^2} = \sqrt{\frac{25}{18} + c^2}$$

球体 S の方程式を考えると,

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + (z - c)^2 = \frac{25}{18} + c^2 \quad \dots\text{②}$$



球面 S に直線 l と共有点を持つので

②に $(t+2, t+2, t)$ を代入すると,

$$\left(t+2-\frac{5}{6}\right)^2 + \left(t+2-\frac{5}{6}\right)^2 + (t-c)^2 = \frac{25}{18} + c^2$$

$$\left(t+\frac{7}{6}\right)^2 + \left(t+\frac{7}{6}\right)^2 + (t-c)^2 = \frac{25}{18} + c^2$$

$$2\left(t+\frac{7}{6}\right)^2 + (t-c)^2 = \frac{25}{18} + c^2$$

$$2\left(t^2 + \frac{7}{3}t + \frac{49}{36}\right) + t^2 - 2ct + c^2 = \frac{25}{18} + c^2$$

$$2t^2 + \frac{14}{3}t + \frac{49}{36} + t^2 - 2ct + c^2 = \frac{25}{18} + c^2$$

$$3t^2 - 2\left(c - \frac{7}{3}\right)t + \frac{4}{3} = 0 \quad \dots\text{③}$$

③を満たす実数 t が存在するので

③の判別式 ≥ 0

$$\left(c - \frac{7}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{4}{3} \geq 0$$

$$c^2 - \frac{14}{3}c + \frac{49}{9} - 4 \geq 0$$

$$9c^2 - 42c + 13 \geq 0$$

$$(3c-1)(3c-13) \geq 0$$

$$c \leq \frac{1}{3}, \frac{13}{3} \leq c$$

以上より, a, b, c の満たす条件は,

$$a = \frac{5}{6} \text{ かつ } b = \frac{5}{6} \text{ かつ } c \leq \frac{1}{3}, \frac{13}{3} \leq c \quad \dots(\text{答})$$

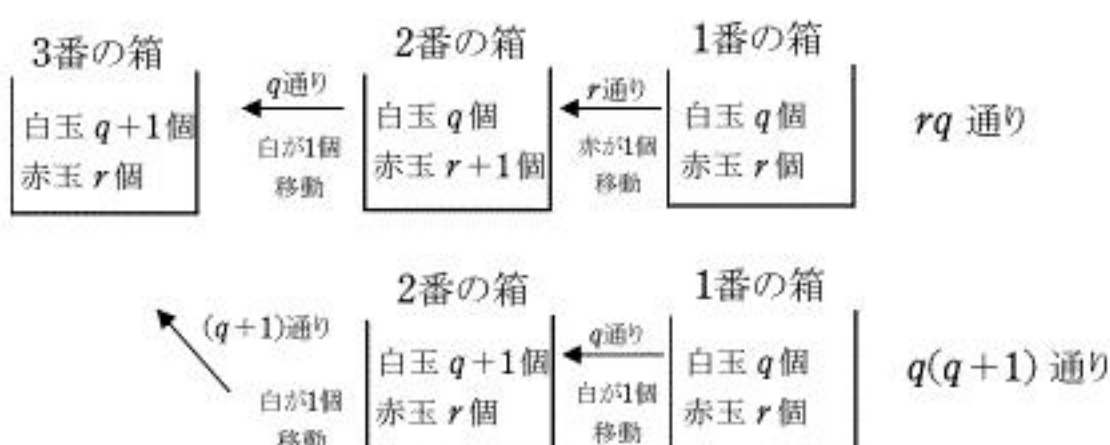
(1) a_2 つまり、2番目の箱の白玉が $q+1$ 個である場合



1番目の箱 q 個の白玉のうち、1個移動するため

$$a_2 = q \quad \dots(\text{答})$$

a_3 つまり3番目の箱の白玉が $q+1$ 個である場合



$$\text{以上より, } a_3 = q(q+1) + rq = q(q+r+1) \quad \dots(\text{答})$$

(2) s_2 について2番目の箱への移動を考えると

1番目の箱に全部で $q+r$ 個入っているうちの1個が移動するため

$$q+r(\text{通り}) \quad S_2 = q+r$$

$n \geq 3$ のとき,

s_3 について3番目の箱への移動は2番目の箱に $q+r+1$ 個が入っているので

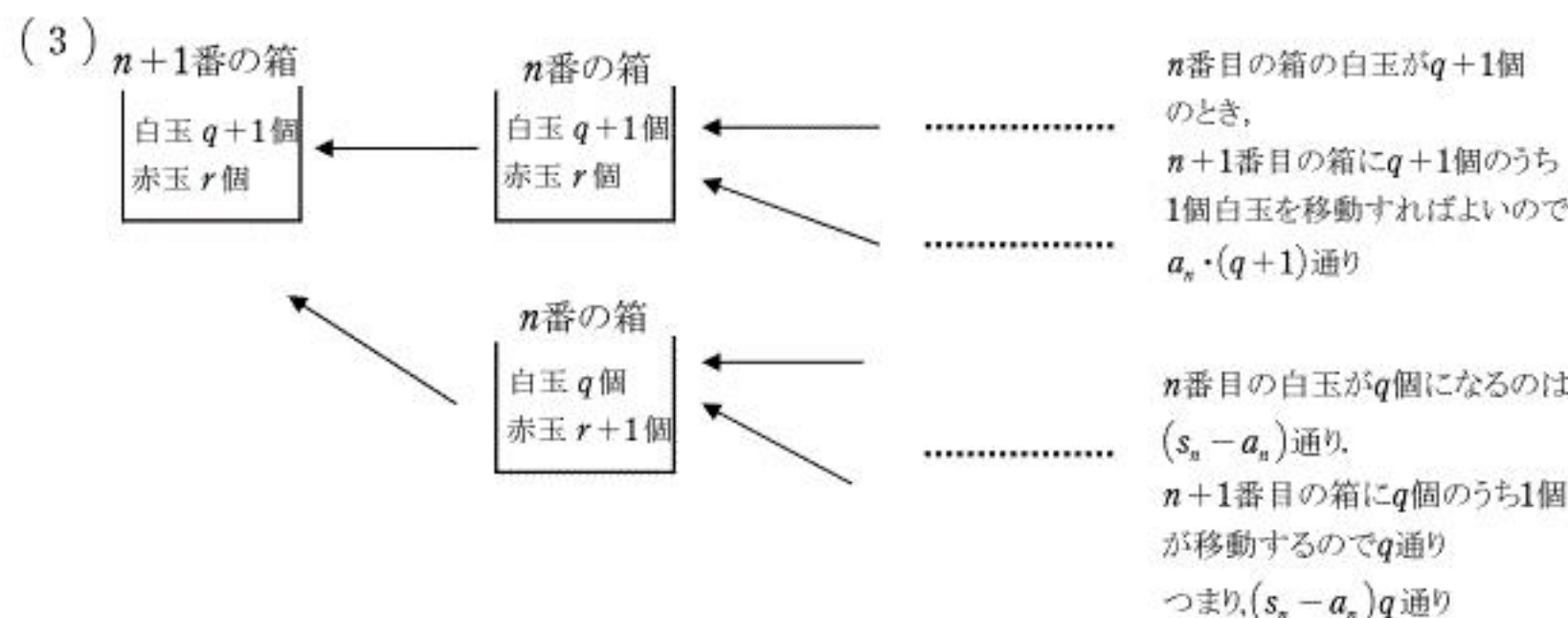
$q+r+1$ 個のうち1個が移動

よって,

$$\begin{aligned} s_3 &= s_2 \cdot (q+r+1) \\ &= (q+r)(q+r+1) \end{aligned}$$

s_4 以降も s_3 と同様に $n-1$ 番目の箱から $q+r+1$ 個のうち1個が移動するため

$$s_n = (q+r)(q+r+1)^{n-2} \quad (n \geq 2) \dots(\text{答})$$



以上の2つの場合が考えられるので

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n(q+1) + (s_n - a_n)q \\ &\iff a_{n+1} = a_n q + a_n + s_n q - a_n q \\ &\iff a_{n+1} = a_n + s_n q \\ &\iff a_{n+1} - a_n = s_n q \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2)より, $s_n = (q+r)(q+r+1)^{n-2}$ より①に代入して

$$a_{n+1} - a_n = q(q+r)(q+r+1)^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad \dots(\text{答})$$

(4) $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= q + \sum_{k=2}^{n-1} q(q+r)(q+r+1)^{k-2} \\ &= q + q(q+r) \sum_{k=2}^{n-1} (q+r+1)^{k-2} \\ &= q + q(q+r) \frac{(q+r+1)^{n-2} - 1}{(q+r+1) - 1} \\ &= q + q(q+r) \frac{(q+r+1)^{n-2} - 1}{q+r} \\ &= q + q \{ (q+r+1)^{n-2} - 1 \} \\ &= q(q+r+1)^{n-2} \end{aligned}$$

$a_2 = q$ より,

$$a_n = q(q+r+1)^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad \dots(\text{答})$$

$$(1) \quad F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta \text{より,}$$

$$F'(x) = \left[\sqrt{1 - \cos \theta} \right]_x^{x+a} = \sqrt{1 - \cos(x+a)} - \sqrt{1 - \cos x} \quad \dots(\text{答})$$

$$(2) \quad F'(x) = \sqrt{1 - \cos(x+a)} - \sqrt{1 - \cos x}$$

$$= \frac{\{1 - \cos(x+a)\} - (1 - \cos x)}{\sqrt{1 - \cos(x+a)} + \sqrt{1 - \cos x}}$$

このとき、分母 >0 なので、 $g(x) = \cos x - \cos(x+a)$ とおくと

$$g(x) = \cos x - \cos(x+a) = 2 \cos\left(\frac{\pi-a}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi-a-2x}{2}\right)$$

$$0 < a < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi-a}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ よって, } \cos\left(\frac{\pi-a}{2}\right) > 0$$

$$\text{なので, } \cos\left(\frac{\pi-a-2x}{2}\right) \leq 0 \text{ となる } x \text{ を求めればよい.}$$

整数 k を用いて、

$$\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi \leq \frac{\pi-a-2x}{2} \leq \left(\frac{3}{2} + 2k\right)\pi \text{ とかける. } \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

よって、 $0 < a < 2\pi$ より、

$$-(2k+2)\pi < -(2k+1)\pi - \frac{a}{2} \leq x \leq -2k\pi - \frac{a}{2} < -2k\pi$$

$0 < x < 2\pi$ なので、 $0 \leq -(2k+2)\pi, -2k\pi \leq 2\pi$

これを満たす k は -1 のみ。

これは整数である。

$$\therefore \pi - \frac{a}{2} \leq x \leq 2\pi - \frac{a}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(3) (1),(2)より増減表は下図のようになる。

x	0		$\pi - \frac{a}{2}$		$2\pi - \frac{a}{2}$		2π
$F'(x)$	$\nearrow$	+	0	-	0	+	$\nearrow$
$F(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$

よって極大値は $x = \pi - \frac{a}{2}$ 、極小値は $x = 2\pi - \frac{a}{2}$ のときである。

$$F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta$$

$$= \int_x^{x+a} \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_x^{x+a} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

と変形できる。

極大値は、

$$F\left(\pi - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{2} \int_{\pi - \frac{a}{2}}^{\pi + \frac{a}{2}} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{a}{2}} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} \left(2 \sin \frac{a}{4} - 0 \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \sin \frac{a}{4}$$

極小値は、

$$F\left(2\pi - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{2} \int_{2\pi - \frac{a}{2}}^{2\pi + \frac{a}{2}} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{a}{2}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} \left(-2 \cos \frac{a}{4} + 2 \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(1 - \cos \frac{a}{4} \right)$$

以上より、

$$\begin{cases} \text{極大値: } x = \pi - \frac{a}{2} \text{ のとき, } 4\sqrt{2} \sin \frac{a}{4} \\ \text{極小値: } x = 2\pi - \frac{a}{2} \text{ のとき, } 4\sqrt{2} \left(1 - \cos \frac{a}{4} \right) \end{cases}$$