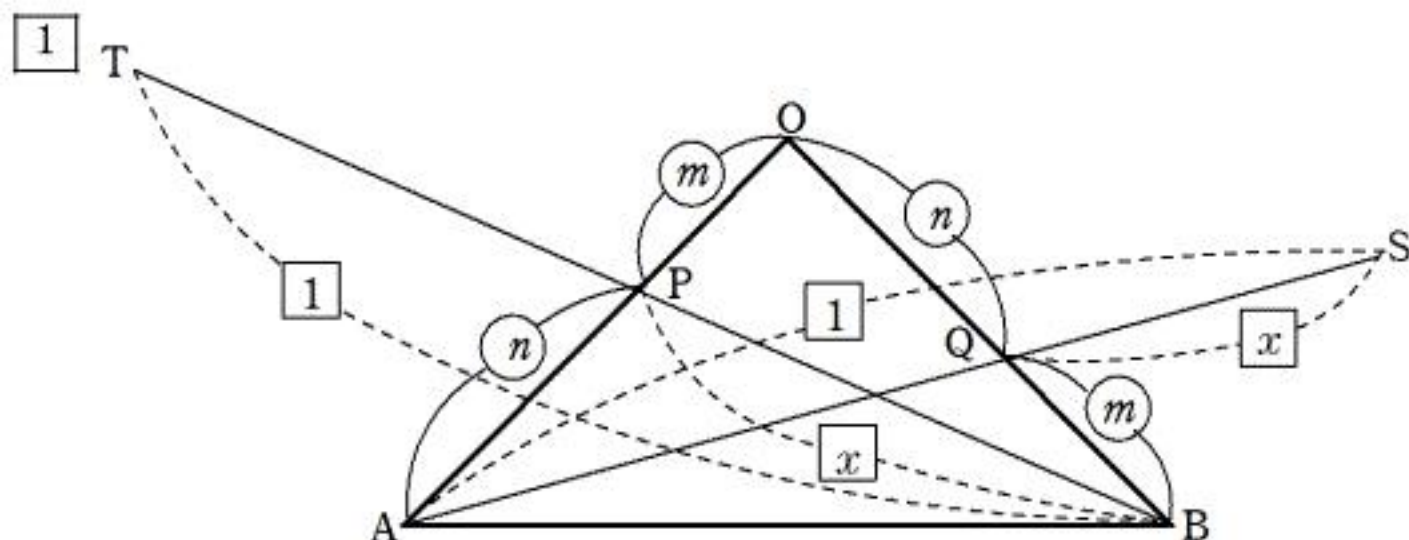




(1) 点Sは線分AQを $1:x$ に外分することから、

$$AQ:AS=1-x:1$$

また、点Qは辺OBを $n:m$ に内分することより、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OB}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-x} \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-x} (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-x} \overrightarrow{OQ} - \frac{1}{1-x} \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{-x}{1-x} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-x} \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{-x}{1-x} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1-x} \cdot \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OB} \\ &= \underline{\underline{\frac{-x}{1-x} \vec{a} + \frac{1}{1-x} \cdot \frac{n}{m+n} \vec{b}}} \end{aligned}$$

(2) 3点O,S,Tが一直線上にあるとき、 k を実数とすると $\overrightarrow{OS} = k \overrightarrow{OT}$ とおける。

点Tは線分BPを $1:x$ に外分することより、

$$BP:PT=1-x:x$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} \\ &= \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{x}{1-x} \overrightarrow{BP} \\ &= \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{x}{1-x} \left(\frac{m}{m+n} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right) \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{1-x} \overrightarrow{OA} + \frac{-x}{1-x} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{1-x} \vec{a} + \frac{-x}{1-x} \vec{b} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= k \overrightarrow{OT} \\ \frac{-x}{1-x} \vec{a} + \frac{1}{1-x} \cdot \frac{n}{m+n} \vec{b} &= k \left(\frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{1-x} \vec{a} + \frac{-x}{1-x} \vec{b} \right) \end{aligned}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{-x}{1-x} &= k \left(\frac{m}{m+n} \cdot \frac{1}{1-x} \right) \\ k &= \frac{-x(m+n)}{m} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \cdot \frac{n}{m+n} &= k \cdot \frac{-x}{1-x} \\ -x &= \frac{1}{k} \cdot \frac{n}{m+n} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①を②に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \\ &= \frac{mn}{(m+n)^2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{mn}}{m+n}}}$$

$$(1) \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin \theta \\ &= 4(1 - 2\sin^2 \theta)\sin \theta + 3\sqrt{2}(1 - 2\sin^2 \theta) - 4\sin \theta \\ &= -8\sin^3 \theta - 6\sqrt{2}\sin^2 \theta + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで, $x = \sin \theta$ とおくとき,

$$\underline{f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } -1 \leq x \leq 1$$

$$g(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2} \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -24x^2 - 12\sqrt{2}x \\ &= -24x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$g(x)$ の増減は以下の通りである.

x	-1	---	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	---	0	---	1
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$8-3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8-3\sqrt{2}$

$$2\sqrt{2} - (-8 - 3\sqrt{2}) > 0 \text{ より, } g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > g(1)$$

$$3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) > 0 \text{ より, } g(0) > g(-1)$$

したがって,

$$x=1 \text{ のとき, 最小値 } -8-3\sqrt{2}$$

$$x=0 \text{ のとき, 最大値 } 3\sqrt{2}$$

$$\text{このとき, } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より,}$$

$$x=1 \text{ つまり } \sin \theta = 1 \text{ のとき, } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$x=0 \text{ つまり } \sin \theta = 0 \text{ のとき, } \theta = 0$$

$$\text{以上より, } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最小値 } -8-3\sqrt{2} \\ \theta = 0 \text{ のとき, 最大値 } 3\sqrt{2} \end{cases}$$

3 $D: y \geq x^2 \dots\dots ①, E: y \leq x^2 \dots\dots ②$ とおく.

(1) 点 $C(a+1, b+2)$ は領域 D 内に含まれるので,

$$\begin{aligned} ①より, \quad b+2 &\geq (a+1)^2 \\ b &\geq (a+1)^2 - 2 \end{aligned}$$

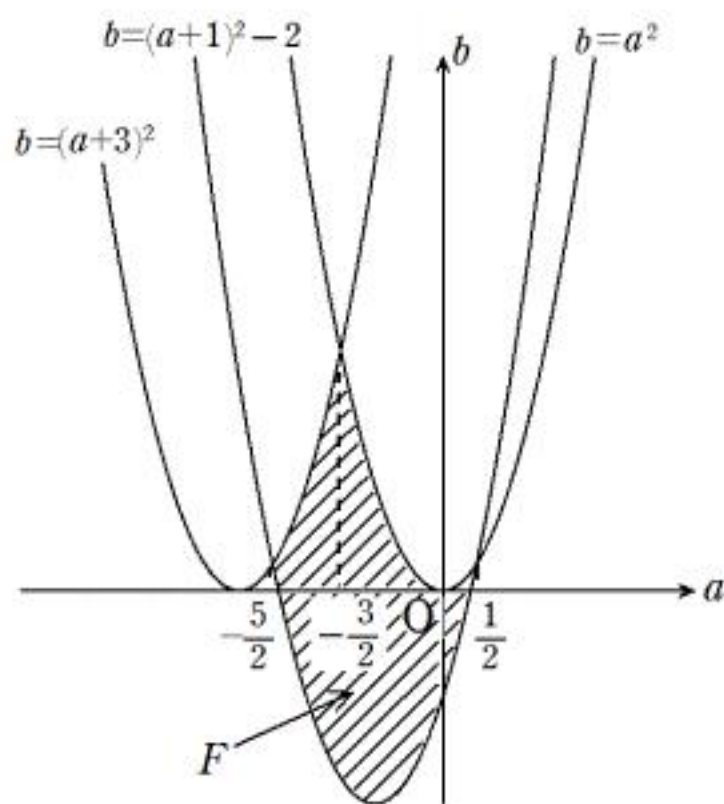
点 $A(a, b)$, 点 $B(a+3, b)$ は領域 E 内に含まれるので,

$$\begin{aligned} ②より, \quad b &\leq a^2 \\ b &\leq (a+3)^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases} b \geq (a+1)^2 - 2 \\ b \leq a^2 \\ b \leq (a+3)^2 \end{cases}$$

(2) 領域 F は以下の斜線部分である.ただし,境界を含む.



(3) 領域 F の面積は, (2) の図より,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} \left[(a+3)^2 - \{(a+1)^2 - 2\} \right] da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[a^2 - \{(a+1)^2 - 2\} \right] da \\ &= 2 \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} (2a+5) da - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (2a-1) da \\ &= 2 \left[a^2 + 5a \right]_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} - \left[a^2 - a \right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{18}{4} - \frac{25}{4} - \frac{15}{2} + \frac{25}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \\ &= \underline{6} \end{aligned}$$

(1) AがBより先に2勝するためには,

(i) Aが2連勝する

$$p \times p = p^2$$

(ii) 1勝1敗したのちにAが勝つ

$${}_2C_1 pq \times p = 2p^2q$$

の2通りがある.

したがって,

$$P_2 = p^2 + 2p^2q = \underline{p^2(2q+1)}$$

(2) AがBより先に3勝するためには,

(i) Aが3連勝する

$$p \times p \times p = p^3$$

(ii) 2勝1敗したのちにAが勝つ

$${}_3C_2 p^2q \times p = 3p^3q$$

(iii) 2勝2敗したのちにAが勝つ

$${}_4C_2 p^2q^2 \times p = 6p^3q^2$$

の3通りがある.

したがって,

$$P_3 = p^3 + 3p^3q + 6p^3q^2 = \underline{p^3(6q^2 + 3q + 1)}$$

(3) $p+q=1$ より, $p=1-q$

$$\begin{aligned} P_2 - P_3 &= p^2(2q+1) - p^3(6q^2+3q+1) \\ &= p^2\{(2q+1) - p(6q^2+3q+1)\} \\ &= p^2(2q+1-6pq^2-3pq-p) \\ &= p^2\{2q+1-6(1-q)q^2-3(1-q)q-(1-q)\} \\ &= 3p^2q^2(2q-1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} < q < 1 \text{ より, } 0 < 2q-1 < 1$$

よって, $3p^2q^2(2q-1) > 0$. ゆえに, $P_3 < P_2$ であることが示せた.