

(1) s, t, u は任意の実数とする.

$y = x$ 上の任意の点 (s, s) の行列 A による像は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)s \\ (c+d)s \end{pmatrix}$$

より, $((a+b)s, (c+d)s)$

条件(イ)より点 $((a+b)s, (c+d)s)$ は, $y = x$ 上にあるので,

$$(c+d)s = (a+b)s$$

s は任意の実数より,

$$c+d = a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$y = -x$ 上の任意の点 $(t, -t)$ の行列 A による像は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)t \\ (c-d)t \end{pmatrix}$$

より, $((a-b)t, (c-d)t)$

条件(ロ)より点 $((a-b)t, (c-d)t)$ は, $y = -x$ 上にあるので,

$$(c-d)t = -(a-b)t$$

t は任意の実数より,

$$c-d = -a+b, \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

x 軸上の任意の点 $(u, 0)$ の行列 A による像は,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au \\ cu \end{pmatrix}$$

より, (au, cu)

条件(ハ)より点 (au, cu) は, 直線 $y = kx$ 上にあるので,

$$cu = kau$$

u は任意の実数より,

$$c = ka \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①+②より,

$$2c = 2d$$

$$c = d \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①に③と④を代入すると,

$$ka + d = a + ka$$

$$d = a$$

以上より,

$$\begin{cases} b = ka \\ c = ka \\ d = a \end{cases}$$

と表すことができる.

$ad - bc = 1$ を満たしているので,

$$a^2 - k^2 a^2 = 1$$

$$a^2 (1 - k^2) = 1$$

よって, $a \neq 0$ より,

$$1 - k^2 > 0$$

$$k^2 < 1$$

求める範囲は, $\underline{-1 < k < 1}$

(2) (1) より,

$$a^2 = \frac{1}{1 - k^2}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

であるから,

$$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ ka & a \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ より,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4\cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin \theta \\ &= 4(1 - 2\sin^2 \theta)\sin \theta + 3\sqrt{2}(1 - 2\sin^2 \theta) - 4\sin \theta \\ &= -8\sin^3 \theta - 6\sqrt{2}\sin^2 \theta + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで, $x = \sin \theta$ とおくと,

$$\underline{f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}}$$

(2) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $-1 \leq x \leq 1$

$g(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -24x^2 - 12\sqrt{2}x \\ &= -24x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$g(\theta)$ の増減は以下の通りである,

x	-1	$---$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$---$	0	$---$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$8-3\sqrt{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	$-8-3\sqrt{2}$

$$2\sqrt{2} - (-8 - 3\sqrt{2}) > 0 \text{ より, } g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > g(1)$$

$$3\sqrt{2} - (8 - 3\sqrt{2}) > 0 \text{ より, } g(0) > g(-1)$$

したがって,

$$x=1 \text{ のとき, 最小値 } -8-3\sqrt{2}$$

$$x=0 \text{ のとき, 最大値 } 3\sqrt{2}$$

このとき, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より,

$$x=1 \text{ つまり } \sin \theta = 1 \text{ のとき, } \theta = \frac{\pi}{2}$$

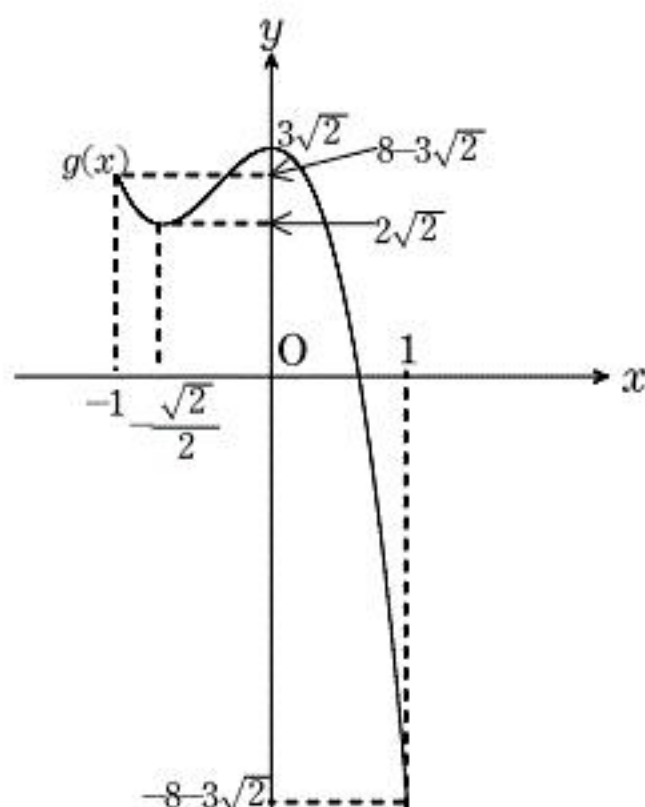
$$x=0 \text{ つまり } \sin \theta = 0 \text{ のとき, } \theta = 0$$

$$\text{以上より, } \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, 最小値 } -8-3\sqrt{2} \\ \theta = 0 \text{ のとき, 最大値 } 3\sqrt{2} \end{cases}$$

(3) 方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつためには, $g(x) = k$ が相異なる 3 つの解をもてばよい.

よって, (2) より, 曲線 $g(x)$ と直線 $y = k$ が $-1 \leq x \leq 1$ のとき, 3 つの共有点を持てばよい.

したがって,



上のグラフより求める範囲は, $\underline{2\sqrt{2} < k \leq 8-3\sqrt{2}}$

$$(1) \quad f(x) = x - \sin x$$

$$g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

とおく.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

であるから, $f(x)$ は単調増加する.

$$\text{また, } f(0) = 0 \text{ より, } x \geq 0 \text{ のとき, } \sin x \leq x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$g''(x) = -\sin x + x = f(x) \geq 0$$

このとき, $g'(0) = 0$ なので $x \geq 0$ のとき, $g'(x) \geq 0$.

したがって, $g(x)$ は単調増加する.

$$\text{また, } g(0) = 0 \text{ より, } x \geq 0 \text{ のとき, } \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \sin x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$x \geq 0 \text{ のとき, } x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

が成り立つ.

(証明終)

$$(2) \quad (1) \text{ より, } t \geq 0 \text{ のとき, } t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ がいえる.}$$

③の両辺に t をかけると,

$$t^2 - \frac{t^4}{6} \leq t \sin t \leq t^2$$

したがって, $x \geq 0$ のとき,

$$\int_0^x t^2 - \frac{t^4}{6} dt \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \int_0^x t^2 dt \quad \cdots \cdots (*)$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 - \frac{t^4}{6} dt &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30} \right]_0^x & \int_0^x t^2 dt &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

であるから, (*) に代入すると

$$x \geq 0 \text{ のとき, } \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \frac{x^3}{3}$$

が成り立つ.

(証明終)

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^x t \sin t dt &= [-t \cos t + \sin t]_0^x \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

(2) より,

$$x \geq 0 \text{ のとき, } \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \sin x - x \cos x \leq \frac{x^3}{3}$$

が成り立つ.

このとき, 両辺を $x^3 > 0$ で割ると,

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leq \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \leq \frac{1}{3}$$

ここで, $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \right) = \frac{1}{3}$ であるから, はさみうちの定理より,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

が成り立つ.

さらに, $t > 0$ とするとき,

$$t = -x \text{ とおくと, } x \rightarrow -0 \text{ のとき, } t \rightarrow +0$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t) - (-t) \cos(-t)}{(-t)^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t - t \cos t}{t^3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

も成り立つ.

$$\text{以上より, } \underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}}}}$$

(1) $a \neq b$ のとき, $f(c) = g(c)$ を満たす実数 c は,

$$c^2 - 2ac + b = c^2 - 2bc + a$$

$$-2ac + b = -2bc + a$$

$$-2ac + 2bc = a - b$$

$$-2c(a - b) = a - b$$

$$-2c = 1$$

$$\underline{c = -\frac{1}{2}}$$

(2) (1) より, $a \neq b$ のとき, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点の x 座標は, $x = -\frac{1}{2}$ である.

また, $f(x) = (x - a)^2 - a^2 + b$, $g(x) = (x - b)^2 - b^2 + a$ であるから,

それぞれの軸は $x = a$, $x = b$ である.

$a < -\frac{1}{2} < b$ を満たすとき,

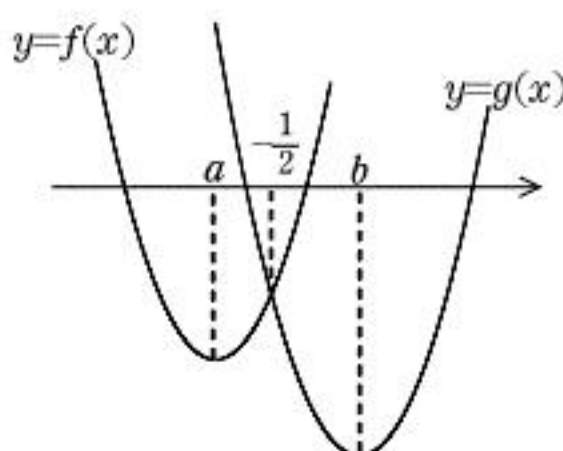
$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ が解を持つためには,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{4} + a + b < 0 \text{ が成り立つ.}$$

$\frac{1}{4} + a + b < 0$ のとき, $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ は

$x = -\frac{1}{2}$ を解に持つので, 十分条件である.

以上よりこの命題の必要十分条件は, $\underline{\frac{1}{4} + a + b < 0}$



(3) $f(x) - g(x) = (b - a)(2x + 1)$ であるから,

$a < b$ のとき,

$$f(x) < g(x) \quad \left(x < -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = g(x) \quad \left(x = -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(x) > g(x) \quad \left(x > -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である.

(i) $a < -\frac{1}{2} < b$ のとき, (2) より $b < -a - \frac{1}{4}$

(ii) $-\frac{1}{2} \leq a < b$ のとき, ③より $f(a) < 0$

$$-a^2 + b < 0 \quad b < a^2$$

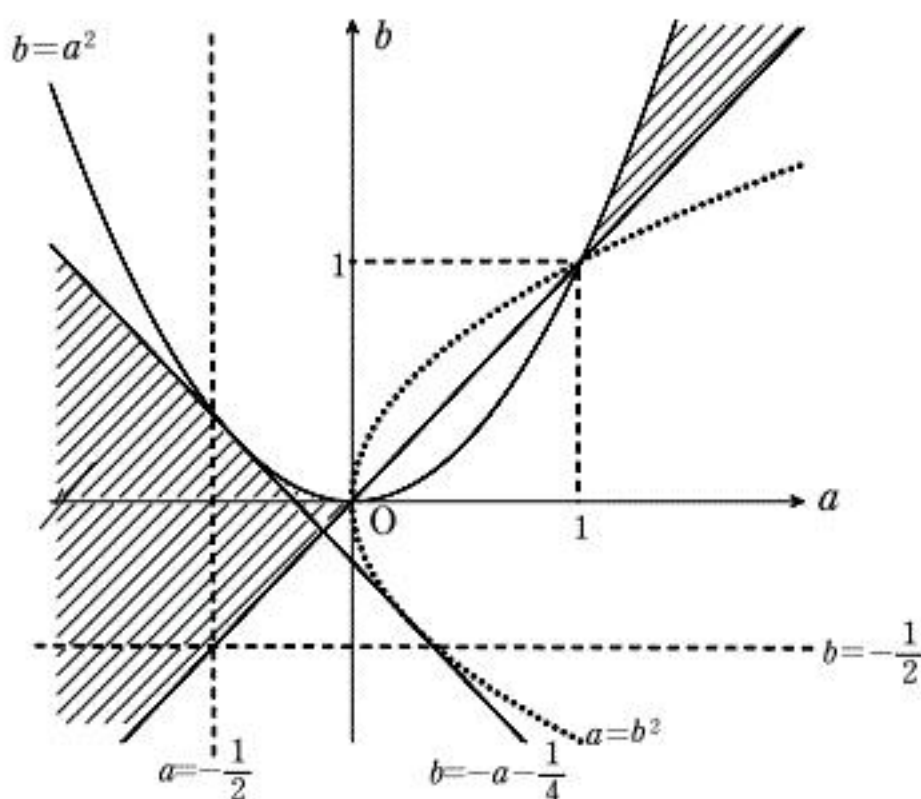
(iii) $a < b \leq -\frac{1}{2}$ のとき, ①より, $g(b) < 0$

$$-b^2 + a < 0 \quad a < b^2$$

(i) ~ (iii) より, 求める条件は, 以下の通りである.

$$\begin{cases} a < -\frac{1}{2} < b \text{ のとき, } b < -a - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \leq a < b \text{ のとき, } b < a^2 \\ a < b \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき, } a < b^2 \end{cases}$$

これらを満たす点 (a, b) の範囲は以下の図のようになる.



ただし, 境界線は全て含まない.

(1) AがBより先に2勝するためには、

(i) Aが2連勝する

$$p \times p = p^2$$

(ii) 1勝1敗したのちにAが勝つ

$${}_2C_1 pq \times p = 2p^2q$$

の2通りがある.

したがって、

$$P_2 = p^2 + 2p^2q = \underline{p^2(2q+1)}$$

(2) AがBより先に3勝するためには、

(i) Aが3連勝する

$$p \times p \times p = p^3$$

(ii) 1勝2敗したのちにAが勝つ

$${}_3C_2 p^2q \times p = 3p^3q$$

(iii) 2勝2敗したのちにAが勝つ

$${}_4C_2 p^2q^2 \times p = 6p^3q^2$$

の3通りがある.

したがって、

$$P_3 = p^3 + 3p^3q + 6p^3q^2 = \underline{p^3(6q^2+3q+1)}$$

(3) AがBより先に4勝するためには、

(i) Aが4連勝する

$$p \times p \times p \times p = p^4$$

(ii) 3勝1敗したのちにAが勝つ

$${}_4C_3 p^3q \times p = 4p^4q$$

(iii) 3勝2敗したのちにAが勝つ

$${}_5C_3 p^3q^2 \times p = 10p^4q^2$$

(iv) 3勝3敗したのちにAが勝つ

$${}_6C_3 p^3q^3 \times p = 20p^4q^3$$

の4通りがある.

したがって、

$$P_4 = p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^4q^3 = \underline{p^4(20q^3+10q^2+4q+1)}$$

(4) $p+q=1$ より, $p=1-q$

$$\begin{aligned} P_3 - P_4 &= p^3(6q^2+3q+1) - p^4(20q^3+10q^2+4q+1) \\ &= p^3\{(6q^2+3q+1) - (1-q)(20q^3+10q^2+4q+1)\} \\ &= p^3\{6q^2+3q+1 - 20q^3 - 10q^2 - 4q - 1 + 20q^4 + 10q^3 + 4q^2 + q\} \\ &= p^3(20q^4 - 10q^3) \\ &= 10p^3q^3(2q-1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} < q < 1 \text{ より, } 0 < 2q-1 < 1$$

よって, $10p^3q^3(2q-1) > 0$. ゆえに, $P_4 < P_3$ であることが示せた.