

$$\boxed{1} \quad f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + (\sin x + \cos x)$$

(1) $t = \sin x + \cos x$ ……①とおくと,

①の両辺を2乗して,

$$t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1) \quad \text{……②}$$

①, ②を $f(x)$ の式に代入して,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 1) + t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \dots (\text{答})$$

(2) ①の右辺を合成すると,

$$t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{……③}$$

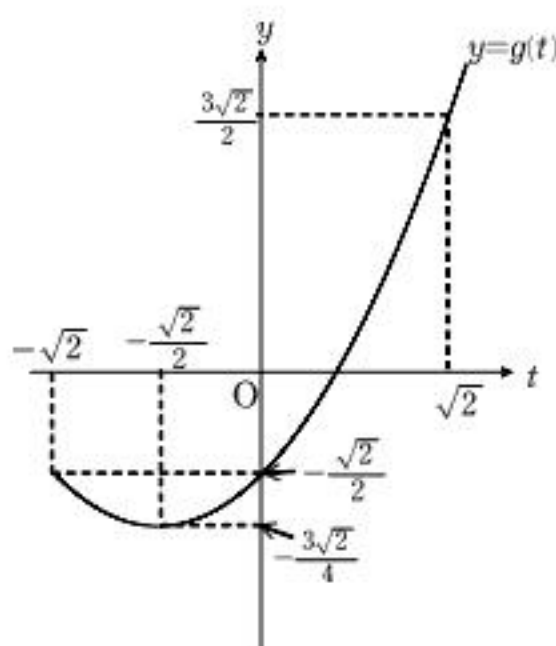
$0 \leq x \leq 2\pi$ なので,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots (\text{答})$$

(3) $g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2}$ とおくと,

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (\text{ただし, } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

よって, $y = g(t)$ のグラフは下のとおり.



グラフより,

$$t = \sqrt{2} \quad \text{つまり, ③より, } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ なので,

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{4}} \quad \text{のとき} \quad f(x) \text{ は最大値} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \text{ をとる.} \quad \dots (\text{答})$$

$$t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{つまり, ③より, } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9}{4}\pi$ なので,

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi \quad \left| \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi \right.$$

$$\underline{x = \frac{11}{12}\pi} \quad \left| \quad \underline{x = \frac{19}{12}\pi} \right. \quad \dots (\text{答})$$

のとき,

$$f(x) \text{ は最小値} = \underline{-\frac{3\sqrt{2}}{4}} \text{ をとる.} \quad \dots (\text{答})$$

- 2 2個のサイコロを同時に投げたときに出た目をそれぞれ a, b とする.

$$X = ab$$

を4で割った余りをまとめると下表のとおり.

$a \setminus b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

2個のサイコロを1回投げたとき,

条件(i)を満たす確率は $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

条件(ii)を満たす確率は $\frac{5}{36}$

条件(iii)を満たす確率は $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

条件(iv)を満たす確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- (1) 条件(iii)を満たすときだから,

求める確率は $\frac{1}{3}$... (答)

- (2) 条件(iv)を満たすときだから,

求める確率は $\frac{1}{9}$... (答)

- (3)

	1回目	2回目	3回目
条件	(iii)	(iii)	(iv)
	(iii)	(iv)	(iii)
	(iv)	(iii)	(iii)

上記の表のように条件を満たすとよいので,

求める確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \quad \dots \text{(答)}$$

$$(1) \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } t > 0) \text{ とおくと,}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = p \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = p$$

$$s = p$$

さらに,

$$|\overline{b}| = 1 \text{ より,}$$

$$p^2 + t^2 = 1 \quad \dots\dots ①$$

$$p^2 = 1 - t^2$$

$$\therefore \underline{\underline{|p| < 1}} \quad \dots (\text{答})$$

この条件のもと①より,

$$t^2 = 1 - p^2$$

$t > 0$ なので,

$$t = \sqrt{1 - p^2}$$

$$\therefore \underline{\underline{\overline{b} = \begin{pmatrix} p \\ \sqrt{1 - p^2} \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad \overline{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{ただし, } z > 0) \text{ とおくと,}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{c} = p \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$$

$$x = p$$

さらに,

$$\overline{b} \cdot \overline{c} = p \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ \sqrt{1 - p^2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ y \\ z \end{pmatrix} = p$$

$$p^2 + \sqrt{1 - p^2} y = p$$

$|p| < 1$ なので,

$$y = \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p^2}}$$

$$= \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}}$$

さらに, $|\overline{c}| = 1$ なので,

$$p^2 + \frac{p^2(1 - p)}{1 + p} + z^2 = 1$$

$$z^2 = \frac{1 + p - 2p^2}{1 + p}$$

$$= \frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}$$

ここで,

$$z^2 > 0, |p| < 1 \quad \dots\dots ②$$

なので,

$$1 + 2p > 0, |p| > -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$$

よって, ②, ③より,

$$-\frac{1}{2} < p < 1$$

この条件のもとで, $z > 0$ なので,

$$z = \sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}}$$

$$\therefore \underline{\underline{\overline{c} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}} \\ \sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}} \end{pmatrix}}} \quad \dots (\text{答})$$

$$\overline{d} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \text{ とおくと, 同様にして,}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{d} = p \text{ より, } X = p$$

さらに,

$$\overline{b} \cdot \overline{d} = p \text{ より, } Y = \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}}$$

さらに,

$$|\overline{d}| = 1 \text{ より, } Z^2 = \frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}$$

$\overline{c} \neq \overline{d}$ より,

$$Z = -\sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}}$$

$$\therefore \underline{\underline{\overline{d} = \begin{pmatrix} p \\ \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}} \\ -\sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}} \end{pmatrix}}} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad \overline{c} \cdot \overline{d} = p \text{ より,}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}} \\ \sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ \frac{p\sqrt{1 - p}}{\sqrt{1 + p}} \\ -\sqrt{\frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p}} \end{pmatrix} = p$$

$$p^2 + \frac{p^2(1 - p)}{1 + p} - \frac{(1 + 2p)(1 - p)}{1 + p} = p$$

$$p^2(1 + p) + p^2(1 - p) - (1 + 2p)(1 - p) = p(1 + p)$$

$$3p^2 - 2p - 1 = 0$$

$$(3p + 1)(p - 1) = 0$$

$$-\frac{1}{2} < p < 1 \text{ なので, } \underline{\underline{p = -\frac{1}{3}}} \quad \dots (\text{答})$$

- (1) $y = x^2$ の点 (s, s^2) における接線は,

$$y - s^2 = 2s(x - s)$$

この接線が, $P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を通るので,

$$\begin{aligned} t^3 - 8t^2 + 15t - 56 - s^2 &= 2s(t - s) \\ s^2 + 2 \cdot (-t)s + (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) &= 0 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

この s の 2 次方程式の判別式を D とおくと,

$$\begin{aligned} D/4 &= (-t)^2 - 1 \cdot (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) \\ &= -(t^3 - 9t^2 + 15t - 56) \\ &= -(t - 8)(t^2 - t + 7) \end{aligned}$$

$0 \leq t < 8, t^2 - t + 7 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$ なので,

$$D/4 = (8 - t)(t^2 - t + 7) > 0$$

すなわち, ① は相異なる 2 つの実数解をもち, それを q, r (ただし, $q < r$) とおくと,

$$q = t - \sqrt{\frac{D}{4}}, r = t + \sqrt{\frac{D}{4}} \quad \dots\dots ②$$

以上より, $y = x^2$ 上の点 $Q(q, q^2), R(r, r^2)$ における接線はそれぞれ点 P を通る.

すなわち, 点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける. $\dots$ (答)

- (2) $y = x^2$ 上の点 $Q(q, q^2)$ における接線は,

$$y = 2qx - q^2$$

点 $R(r, r^2)$ における接線は,

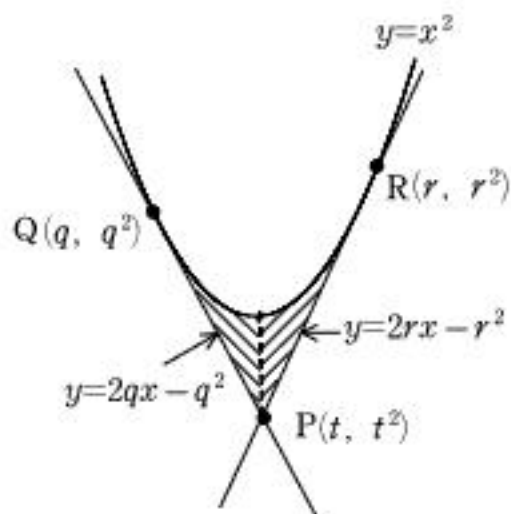
$$y = 2rx - r^2$$

2 本の接線の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} 2qx - q^2 &= 2rx - r^2 \\ x &= \frac{q + r}{2} \end{aligned}$$

これは点 P の x 座標に一致するので,

$$t = \frac{q + r}{2} \quad \dots\dots ③$$



求める面積 $S(t)$ は図の斜線部で,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_q^t \{x^2 - (2qx - q^2)\} dx + \int_t^r \{x^2 - (2rx - r^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - q)^3 \right]_q^t + \left[\frac{1}{3}(x - r)^3 \right]_t^r \\ &= \frac{1}{3}(t - q)^3 - \frac{1}{3}(t - r)^3 \\ &= \frac{1}{12}(r - q)^3 \quad (\because ③) \\ &= \frac{2}{3} \{(8 - t)(t^2 - t + 7)\}^{\frac{3}{2}} \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$